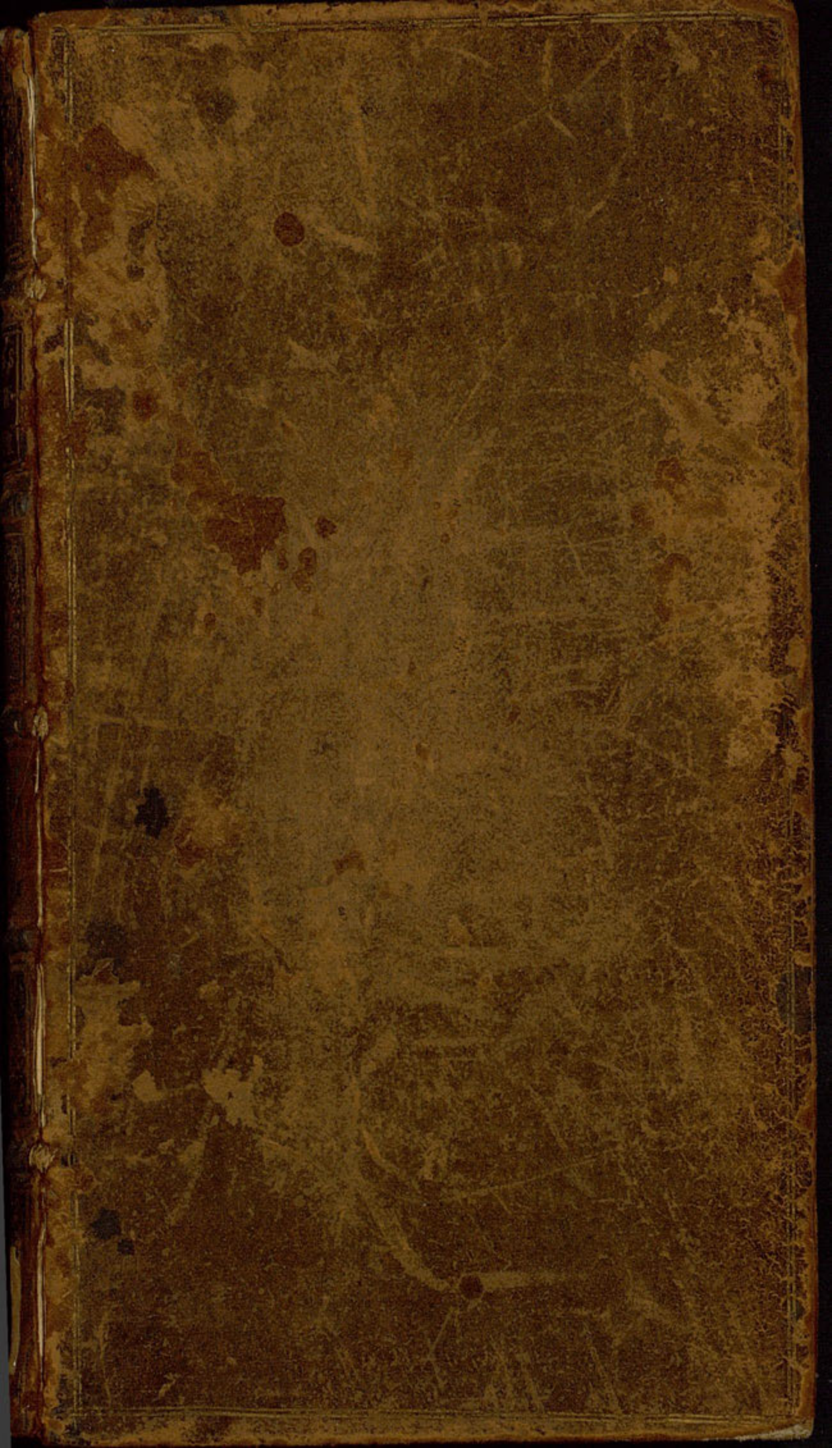

UNIVERSIDAD Ð SEVILLA
Biblioteca


UMASS
BOSTON




EX BIBLIOTECÂ
D. A. de VLLOA

Arithmetica Universalis:

SIVE

DE COMPOSITIONE

ET

Resolutione Arithmetica

LIBER.



BOOKS Printed for Benjamin *and* Samuel Tooke.

CLASSICKS.

Virgilii Opera.
Horatii Opera.
Juvenal. & Persii Sat.
Terentii Comœdiæ.
Tullii Orationes.
Ovidii Metamorph.
——— Epistolæ.
——— Fastorum.
Phædri Fabulæ.
Lucius Florus.
Sallustii Historia.
Eutropii Historia.
Martialis Epigrammata.
Lucretius de Rerum Natura, by *Creech*.
Suetonius.
Cæsaris Commentarii.
Cornelius Nepos.

} Delphini.

Corpus omnium Veterum Poetarum, 2 Vol. Fol.
Livii Historia, 2 Vol. 8vo.
Pantheon, or the History of the Heathen Gods, 8vo.
Xenophon de Cyri Institutione, Gr. & Lat.
Quintus Curtius Minellii.
Tullius de Officiis, Minellii.
Plautus, 2 vol. 12mo.
Ray's Nomenclatura.
Latin Common-Prayer.
Latin Testament.
Synopsis Græcæ Linguæ.
Institutiones Christianæ.
Tullii Orationes selectæ, 12mo.
Græca Epigram. West. &c.
Cæsaris Comment. 12mo.
Homeri Ilias, Gr. & Lat.
Littleton's Dictionary.
Cole's Dictionary, Lat. 8vo. and English.

MISCELLANIES.

Mr. *Collier*'s Church-History, 2 vol. Fol. compleat.
History of *England*, 2 vol. Fol.
State-Tryals, 4 vol. Fol. compleat.
Bp *Burnett*'s History of the Reformation, 3 vol. Fol. compleat.
Cambridge Concordance, with a great many Additions.
All Dr. *Sherlock*'s Works.
Feltham's Resolves.
Dean *Stanhope*'s Works.
Drelincourt on Death.
Stanhope's Christian Pattern, 8vo,
Eachard's Roman History, 5 vol. compleat.
Bona's Guide to Eternity.
Seneca's Morals.
Comber's Epitomy of the Common-Prayer.
Tillotson's Works, 3 vol. Fol. compleat.
Nelson's Feasts and Fasts.
Addison's Works compleat.
Tatlers compleat.

Arithmetica Universalis:

SIVE

DE COMPOSITIONE

ET

RESOLUTIONE

ARITHMETICA

LIBER.

EDITIO SECUNDA,

In qua multa immutantur & emendantur, nonnulla adduntur.



LONDINI;

Impensis BENJ. & SAM. TOOKE, Bibliopolarum, juxta Medii Templi Portam, in Vico vulgo vocato *Fleetstreet.* M.DCC.XXII.

ARITHMETICA UNIVERSALIS,

SIVE

De Compositione & Resolutione ARITHMETICA

LIBER.

Computatio vel fit per *numeros* ut in vulgari Arithmetica, vel per *ſpecies* ut Analyſtis mos eſt. Utraque iiſdem innititur fundamentis, & ad eandem metam collimat: *Arithmetica* quidem definite & particulariter, *Algebraica* autem indefinitè & univerſaliter; ita ut enuntiata ferè omnia quæ in hâc computatione habentur, & præſertim concluſiones, *Theoremata* dici poſſint. Verùm Algebra maximè præcellit quòd cùm in Arithmetica Quæſtiones tantùm reſolvantur progrediendo à datis ad quæſitas quantitates, hæc à quæſitis tanquam datis ad datas tanquam quæſitas quantitates plerumque regreditur; ut ad concluſionem aliquam, ſeu Æquationem, quocunque demum modo perveniatur, ex quâ quantitatem quæſitam elicere liceat. Eoque pacto conficiuntur difficillima Problemata quorum reſolutiones ex Arithmetica ſola fruſtra peterentur. Arithmetica tamen Algebræ in omnibus ejus operationibus ita ſubſervit, ut non niſi unicam perfectam *computandi Scientiam* conſtituere videantur; & utramque propterea conjunctim explicabo.

Quiſquis hanc Scientiam aggreditur, imprimis vocum & notarum ſignificationes intelligat, & fun-

damentales addiſcat operationes, Additionem nempe Subductionem, Multiplicationem, Diviſionem, Extractionem Radicum, Reductiones fractionum & radicalium quantitatum, & modos ordinandi terminos Æquationum, ac incognitas quantitates (ubi plures ſunt) exterminandi. Deinde has operationes, reducendo Problemata ad æquationes, exerceat; & ultimò naturam & reſolutionem æquationum contempletur.

De Vocum quarundam & notarum ſignificatione.

PER *Numerum* non tam multitudinem unitatum quam abſtractam quantitatis cujuſvis ad aliam ejuſdem generis quantitatem quæ pro unitate habetur rationem intelligimus. Eſtque triplex; integer, fractus & ſurdus: *Integer* quem unitas metitur, *Fractus* quem unitatis pars ſubmultiplex metitur, & *Surdus* cui unitas eſt incommenſurabilis.

Integrorum numerorum notas (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,) & notarum, ubi plures inter ſe nectuntur, valores nemo non intelligit. Quemadmodum verò numeri in primo loco ante unitatem, ſive ad ſiniſtram, ſcripti denotant denas unitates, in ſecundo centenas, in tertio millenas, &c. ſic numeri in primo loco poſt unitatem ſcripti denotant decimas partes unitatis, in ſecundo centeſimas, in tertio milleſimas, &c. Hos autem dicimus Fractos *Decimales* quòd in ratione decimali perpetuò decreſcant. Et ad diſtinguendum integros à decimalibus interjici ſolet comma, vel punctum, vel etiam lineola. Sic numerus 732'|569, denotat ſeptingentas triginta duas unitates, una cum quinque decimis, ſex centeſimis, & novem milleſimis partibus unitatis. Qui & ſic 732,|569, vel ſic 732·569, vel etiam ſic 732⌊569, nonnunquam ſcribitur. Atque ita numerus 57104'2083, denotat quinquaginta

ginta ſeptem mille, centum & quatuor unitates; una cum duabus decimis, octo milleſimis, & tribus decimis milleſimis partibus unitatis. Et numerus o'064 denotat ſex centeſimas & quatuor milleſimas partes. Surdorum & aliorum fractorum notæ in ſequentibus habentur.

Cum rei alicujus quantitas ignota eſt vel indeterminatè ſpectatur, ita ut per numeros non liceat exprimere, ſolemus per ſpeciem *aliquam ſeu literam deſignare.* Et ſi quando cognitas quantitates tanquam indeterminatas ſpectemus, diſcriminis cauſa deſignamus initialibus Alphabetæ literis *a*, *b*, *c*, *d*, & incognitas finalibus *z*, *y*, *x*, &c. Aliqui pro cognitis ſubſtituunt conſonantes vel majuſculas literas, & vocales vel minuſculas pro incognitis.

Quantitates vel Affirmativæ *ſunt ſeu majores nihilo, vel* Negativæ *ſeu nihilo minores.* Sic in rebus humanis poſſeſſiones dici poſſunt bona affirmativa, debita vero bona negativa. Inque motu locali progreſſus dici poteſt motus affirmativus, & regreſſus motus negativus, quia prior auget & poſterior diminuit iter confectum. Et ad eundem modum in Geometria, ſi linea verſus plagam quamvis ducta pro affirmativa habeatur, negativa erit quæ verſus plagam oppoſitam ducitur. Veluti ſi AB dextrorſum ducatur, & BC ſiniſtrorſum; ac AB ſtatuatur affirmativa

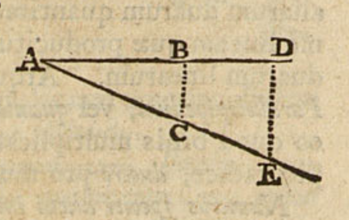
A C B
|——————|

tunc BC pro negativa habebitur, eò quòd inter ducendum diminuit AB; redigitque vel ad breviorem AC, vel ad nullam ſi forte C inciderit in ipſum A, vel ad minorem nulla ſi BC longior fuerit quam AB de qua aufertur. *Negativæ* quantitati deſignandæ ſignum —, *Affirmativæ* ſignum + præfigi ſolet. Signum $\pm$ incertum eſt, & ſignum $\mp$ etiam incertum ſed priori contrarium.

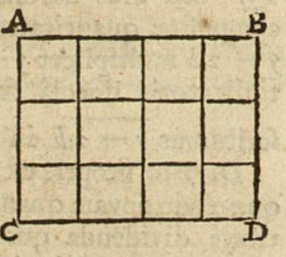
In aggregato quantitatum nota + *significat quantitatem suffixam esse cæteris* addendam *&* *nota* — *esse* subducendam. Et has notas vocabulis *plus* & *minus* exprimere solemus. Sic 2 + 3, sive 2 plus 3, valet summam numerorum 2 & 3, hoc est 5. Et 5 — 3, sive 5 minus 3, valet differentiam quæ oritur subducendo 3 à 5, hoc est 2. Et — 5 + 3 valet differentiam quæ oritur subducendo 5 à 3, hoc est — 2. Et 6 — 1 + 3 valet 8. Item $a+b$ valet summam quantitatum a & b: Et $a-b$ valet differentiam, quæ oritur subducendo b ab a. Et $a-b+c$ valet summam istius differentiæ & quantitatis c. Puta si a sit 5, b 2, & c 8; tum $a+b$ valebit 7 & $a-b$ 3 & $a-b+c$ 11. Item $2a+3a$ valet $5a$. Et $3b-2a-b+3a$ valet $2b+a$; nam $3b-b$ valet $2b$ & $-2a+3a$ valet a, quorum aggregatum est $2b+a$. Et sic in aliis. Hæ autem notæ + & — dicuntur *Signa*. Et ubi neutrum initiali quantitati præfigitur signum + subintelligi debet.

Multiplicatio propriè dicitur quæ fit per numeros integros, utpote quærendo novam quantitatem toties majorem quantitate multiplicanda quoties numerus multiplicans sit major unitate. Sed aptioris vocabuli defectu Multiplicatio etiam dici solet quæ fit per fractos aut surdos numeros; quærendo novam quantitatem in ea quacunque ratione ad quantitatem multiplicandam quam habet multiplicator ad unitatem. Neque tantùm fit per abstractos numeros sed etiam per concretas quantitates, ut per lineas, superficies, motum localem, pondera, *&c.* quatenus hæ ad aliquam sui generis notam quantitatem tanquam unitatem relatæ, rationes numerorum exprimere possunt, & vices supplere. Quemadmodum si quantitas A multiplicanda sit per lineam duodecim pedum, posito quod linea bipedalis sit unitas, producentur per istam multiplicationem

cationem 6 A, ſive ſexies A, perinde ac ſi A multiplicaretur per abſtractum numerum 6, ſiquidem 6 A ſit in ea ratione ad A quam habet linea duodecim pedum ad unitatem bipedalem. Atque ita ſi duas quaſvis lineas AC & AD per ſe multiplicare oportet, capiatur AB unitas, & agatur BC eique parallela DE, & AE productum erit hujus multiplicationis, eo quod ſit ad AD ut AC ad unitatem AB.



Quinetiam mos obtinuit ut geneſis ſeu deſcriptio ſuperficiei per lineam ſuper alia linea ad rectos angulos moventem dicatur multiplicatio iſtarum linearum. Nam quamvis linea utcunque multiplicata non poſſit evadere ſuperficies, adeoque hæc ſuperficiei è lineis generatio longè alia ſit à multiplicatione, in hoc tamen conveniunt, quod numerus unitatum in alterutra linea, multiplicatus per numerum unitatum in altera, producat abſtractum numerum unitatum in ſuperficie lineis iſtis comprehenſa, ſi modò Unitas ſuperficialis definiatur, ut ſolet, Quadratum cujus latera ſunt unitates lineares. Quemadmodum ſi recta AB conſtet quatuor unitatibus & AC tribus, tum rectangulum AD conſtabit quater tribus ſeu duodecim unitatibus quadratis ut inſpicienti Schema patebit.



Eſtque ſimilis analogia ſolidi & ejus quod continua trium quantitatum multiplicatione producitur. Et hinc viciſſim evenit quod vocabula *ducere*, *contentum*, *rectangulum*, *quadratum*, *cubus*, *dimenſio*, *latus*, & ſimilia quæ ad Geometriam ſpectant, Arithmeticis tribuantur operationibus.

rationibus. Nam per *quadratum*, vel *rectangulum*, vel *quantitatem duarum dimensionum* non semper intelligimus superficiem, sed ut plurimùm quantitatem alterius cujuscunque generis quæ multiplicatione aliarum duarum quantitatum producitur, & sæpissimè lineam quæ producitur multiplicatione aliarum duarum linearum. Atque ita dicimus *Cubum* vel *Parallelepipedum*, vel *quantitatem trium dimensionum* pro eo quod binis multiplicationibus producitur, *latus* pro radice, *ducere* pro multiplicare; & sic in aliis.

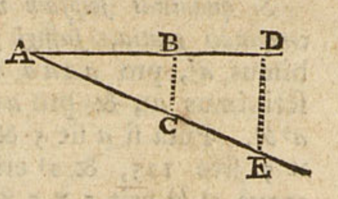
Numerus speciei alicui immediatè præfixus denotat speciem illam toties sumendam esse. Sic $2a$ denotat duo a, $3b$ tria b, $15x$ quindecim x.

Duæ vel plures species immediatè connexæ designant factum, *seu quantitatem quæ fit per multiplicationem omnium in se invicem.* Sic ab denotat quantitatem quæ fit multiplicando a per b. Et abx denotat quantitatem quæ fit multiplicando a per b, & factum illud per x. Puta si a sit 2, & b sit 3, & x sit 5, tum ab erit 6 & abx 30.

Inter quantitates sese multiplicantes, nota $\times$, vel vocabulum *in*, ad factum designandum nonnunquam interscribitur. Sic 3×5 vel 3 in 5 denotat 15. Sed usus harum notarum præcipuus est, ubi compositæ quantitates sese multiplicant. Veluti si $y - 2b$ multiplicet $y + b$, terminos utriusque multiplicatoris lineolâ superimpositâ connectimus & scribimus $\overline{y - 2b}$ in $\overline{y + b}$, vel $\overline{y - 2b} \times \overline{y + b}$.

Divisio propriè est quæ fit per numeros integros quærendo novam quantitatem toties minorem quantitate dividenda quoties unitas sit minor Divisore. Sed ob analogiam vox etiam usurpari solet cum nova quantitas in ratione quacunque ad quantitatem dividendam quæritur quam habet unitas ad divisorem; sive divisor ille sit fractus aut surdus numerus aut alia cujusvis generis quantitas. Sic

ad



ad dividendum lineam AE per lineam AC, existente AB unitate; agenda est ED parallela CB, & erit AD Quotiens. Imò & Divisio propter similitudinem quandam dicitur cum rectangulum ad datam lineam tanquam Basem applicatur ut inde noscatur altitudo.

Quantitas infra quantitatem cum lineola interjecta denotat quotum, *seu quantitatem quæ oritur ex divisione superioris quantitatis per inferiorem.* Sic $\frac{6}{2}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo 6 per 2, hoc est 3: & $\frac{5}{8}$ quantitatem quæ oritur dividendo 5 per 8, hoc est octavam partem numeri 5: & $\frac{a}{b}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo a per b; puta si a sit 15 & b 3, tum $\frac{a}{b}$ denotat 5. Et sic $\frac{ab - bb}{a + x}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo $ab - bb$ per $a + x$. Atque ita in aliis. Hujusmodi autem quantitates *fractiones* dicuntur, parsque superior *Numerator*, ac inferior *Denominator*.

Aliquando Divisor quantitati divisæ, interjecto arcu, præfigitur. Sic ad designandum quantitatem quæ oritur ex divisione $\frac{axx}{a + b}$ per $a - b$, scribi potest $\overline{a - b)}\ \frac{axx}{a + b}$.

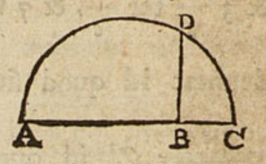
Etsi multiplicatio per immediatam quantitatum conjunctionem denotari solet, tamen numerus integer ante numerum fractum denotat summam utriusque. Sic $3\frac{1}{2}$ denotat tria cum semisse.

Si quantitas seipsam multiplicet, numerus factorum, compendii gratia, suffigi solet. Sic pro *a a a* scribimus a^3, pro *a a a a* scribimus a^4, pro *a a a a a* scribimus a^5, & pro *a a a b b* scribimus $a^3 bb$ vel $a^3 b^2$. Puta si *a* sit 5 & *b* sit 2, tum a^3 erit $5 \times 5 \times 5$ sive 125, & a^4 erit $5 \times 5 \times 5 \times 5$ sive 625, atque $a^3 b^2$ erit $5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2$ sive 500. Ubi nota quod numerus inter duas species immediatè scriptus, ad priorem semper pertinet. Sic 3 in quantitate $a^3 bb$ non denotat *b b* ter capiendum esse sed *a* in se bis ducendum. Nota etiam quod hæ quantitates tot *dimensionum* vel *potestatum* vel *dignitatum* esse dicuntur quot factoribus seu quantitatibus se multiplicantibus constant, & numerus suffixus vocatur *Index* potestatum vel dimensionum. Sic *a a* est duarum dimensionum vel potestatum, & a^3 trium, ut indicat suffixus numerus 3. Dicitur etiam *a a* quadratum, a^3 cubus, a^4 quadrato-quadratum, a^5 quadrato-cubus, a^6 cubo-cubus, a^7 quadrato-quadrato-cubus, & sic porro. Et quantitas *a* ex cujus in se multiplicatione hæ potestates generantur dicitur earum *Radix*, nempe radix quadratica quadrati *a a*, cubica cubi a^3, &c.

Cùm autem radix per seipsam multiplicata producat quadratum, & quadratum illud iterum per radicem multiplicatum producat cubum, *&c.* erit (ex definitione Multiplicationis) ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum, & quadratum ad cubum, *&c.* Adeoque quantitatis cujuscunque *radix quadratica* erit medium proportionale inter unitatem & quantitatem illam, & *radix cubica* primum è duobus mediè proportionalibus, & *radix quadrato-quadratica* primum è tribus, & sic præterea. Duplici igitur affectione radices innotescunt, tum quod seipsas multiplicando producant superiores potestates, tum quod sint è mediis proportionalibus inter istas potestates & unitatem. Sic

numeri

numeri 64 radicem quadraticam esse 8 & cubicam 4, vel ex eo patet quod 8×8 & $4 \times 4 \times 4$ valeant 64, vel quod sit 1 ad 8 ut 8 ad 64, & 1 ad 4 ut 4 ad 16 & 16 ad 64. Et hinc si lineæ alicujus AB radix quadratica extrahenda est, produc eam ad C ut sit BC unitas, dein super AC describe semicirculum, & ad B erige perpendiculum huic circulo occurrens in D, eritque BD radix, quia media proportionalis est inter AB & unitatem BC.



Ad designandam radicem *alicujus quantitatis præfigi solet nota* $\surd$ *si radix sit quadratica,* & $\surd 3:$ *Si sit cubica,* & $\surd 4:$ *Si quadrato-quadratica*, &c. Sic $\surd 64$ denotat 8; & $\surd 3: 64$ denotat 4; & $\surd aa$ denotat a; & $\surd ax$ denotat radicem quadraticam ex ax; & $\surd 3: 4axx$ radicem cubicam ex $4axx$. Ut si a sit 3, & x 12; tum $\surd ax$ erit $\surd 36$, seu 6; & $\surd 3: 4axx$ erit $\surd 3: 1728$, seu 12. Et hæ radices ubi non licet extrahere dicuntur *surdæ quantitates*, ut $\surd ax$; vel *surdi numeri*, ut $\surd 12$.

Nonnulli pro designanda quadratica potestate usurpant q, pro cubica c, pro quadrato-quadratica qq, pro quadrato-cubica qc, &c. Et ad hunc modum pro quadrato, cubo, & quadrato-quadrato ipsius A, scribitur Aq, Ac, Aqq, &c. Et pro radice cubica ex $abb - x^3$ scribitur $\surd c: abb - x^3$. Alii alias notas adhibent, sed quæ jam ferè exoleverunt.

Nota $=$ *designat quantitates hinc inde* æquales *esse.* Sic $x = b$ designat x æqualem esse b.

Nota :: *significat quantitates hinc inde* proportionales *esse.* Sic $a.b::c.d$, significat esse a ad b ut c ad d. Et $a.b.e::c.d.f$ esse a, b & e inter se ut sunt c, d & f inter se respectivè, vel esse a ad c, b ad d & e ad f in eadem ratione.

Deni-

Denique notarum quæ ex his componuntur interpretatio per Analogiam facile innotescit. Sic enim $\frac{3}{4}a^3bb$ denotat tres quartas partes ipsius a^3bb, & $3\frac{a}{c}$ ter $\frac{a}{c}$, & $7\sqrt{ax}$ septies $\sqrt{ax}$. Item $\frac{a}{b}x$ denotat id quod fit multiplicando x per $\frac{a}{b}$, & $\frac{5ee}{4a+9e}Z^3$ id quod fit multiplicando Z^3 per $\frac{5ee}{4a+9e}$, hoc est per Quotum exortum divisione $5ee$ per $4a+9e$; & $\frac{2a^3}{9c}\sqrt{ax}$ id quod fit multiplicando $\sqrt{ax}$ per $\frac{2a^3}{9c}$; & $\frac{7\sqrt{ax}}{c}$ quotum exortum divisione $7\sqrt{ax}$ per c; & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ quotum exortum divisione $8a\sqrt{cx}$ per summam quantitatum $2a+\sqrt{cx}$. Et sic $\frac{3axx-x^3}{a+x}$ denotat quotum exortum divisione differentiæ $3axx-x^3$ per summam $a+x$, & $\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ radicem ejus Quoti, & $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ id quod fit multiplicando radicem illam per summam $2a+3c$. Sic etiam $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ denotat radicem summæ quantitatum $\frac{1}{4}aa$ & bb & $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem summæ quantitatum $\frac{1}{2}a$ & $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, & $\frac{2a^3}{aa-zz}\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem illam multiplicatam per $\frac{2a^3}{aa-zz}$. Et sic in aliis.

Cæterum nota quod in hujusmodi complexis quantitatibus non opus eſt ad ſignificationem ſingularum literarum ſemper attendere; ſed ſufficit in genere tantum intelligere, *e. g.* quod $\sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$ ſignificat radicem aggregati $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; quodcunq; tandem prodeat illud aggregatum cum numeri vel lineæ pro literis ſubſtituuntur. Atque ita quod $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}}{a - \sqrt{ab}}$ ſignificat quotum exortum diviſione quantitatis $\sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$ per quantitatem $a - \sqrt{ab}$, perinde ac ſi quantitates illæ ſimplices eſſent & cognitæ, etſi quænam ſint impræſentiarum prorſus ignoretur, & ad ſingularum partium conſtitutionem aut ſignificationem neutiquam attendatur. Id quod monendum eſſe duxi ne complexione terminorum Tyrones quaſi conterriti in limine hæreant.

DE ADDITIONE.

NUmerorum, ubi *non ſunt admodum compoſiti*, Additio per ſe manifeſta eſt. Sic quod 7 & 9 ſeu 7 + 9 faciunt 16, & quod 11 + 15 faciunt 26 prima fronte patet. At in *magis compoſitis* opus peragitur *ſcribendo numeros ſerie deſcendente & ſummas columnarum ſigillatim colligendo.* Quemadmodum ſi numeri 1357 & 172 addendi ſunt, ſcribe alterutrum 172 infra alterum 1357 ita ut hujus unitates 2 alterius unitatibus 7 ſubjiciantur, cæterique numeri numeris correſpondentibus, nempe deni 7 denis 5, & centenus 1 centenis 3. Tum incipiendo ad dextram, dic 2 & 7 faciunt 9 quem ſcribe infra. Item 7 & 5 faciunt 12, cujus poſteriorem

$$\begin{array}{r} 1357 \\ \underline{172} \\ 1529 \end{array}$$

riorem numerum 2 ſcribe infra, priorem vero 1 aſſerva proximis numeris 1 & 3 adjiciendum. Dic itaque præterea 1 & 1 faciunt 2, cui 3 adjectus facit 5, & ſcribe 5 infra, & manebit tantùm 1 prima figura ſuperioris numeri, quæ etiam infra ſcribenda, eſt, & ſic habebitur ſumma 1529.

Sic numeros $87899 + 13403 + 885 + 1920$, quo in unam ſummam redigantur, ſcribe in ſerie deſcendente ita ut unitates unam columnam, deni numeri aliam, centeni tertiam, milleni quartam conſtituant, & ſic præterea. Deinde dic $5 + 3$ valent 8, & $8 + 9$ valent 17, ſcribeque 7 infra, & 1 adjice proximis numeris dicendo $1 + 8$ valent 9, $9 + 2$ valent 11, ac $11 + 9$ valent 20: Subſcriptoque 0, dic iterum ut ante $2 + 8$ valent 10, $10 + 9$ valent 19, $19 + 4$ valent 23, & $23 + 8$ valent 31, adeoque aſſervato 3 ſubſcribe 1 ut ante & iterum dic $3 + 1$ valent 4, $4 + 3$ valent 7, & $7 + 7$ valent 14. Quare ſubſcribe 4, denuoque dic $1 + 1$ valent 2, & $2 + 8$ valent 10, quem ultimò ſubſcribe, & omnium ſummam habebis 104107.

87899
13403
1920
885
104107

Ad eundem modum numeri decimales adduntur ut in annexo paradigmate videre eſt.

630'953
51'0807
305'27
987'3037

In terminis Algebraicis Additio *fit connectendo quantitates addendas cum ſignis propriis, & inſuper uniendo quæ poſſunt uniri.* Sic a & b faciunt $a + b$; a & $-b$ faciunt $a - b$; $-a$ & $-b$ faciunt $-a - b$; $7a$ & $9a$, faciunt $7a + 9a$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt $-a\sqrt{ac} + b\sqrt{ac}$ vel $b\sqrt{ac} - a\sqrt{ac}$, nam perinde eſt quo ordine ſcribantur.

Quantitates affirmativæ quæ ex parte ſpecierum conveniunt, uniuntur addendo numeros præfixos quibus

quibus species multiplicantur. Sic $7a + 9a$ faciunt $16a$. Et $11bc + 15bc$ faciunt $26bc$. Item $3\frac{a}{c} + 5\frac{a}{c}$ faciunt $8\frac{a}{c}$, & $2\sqrt{ac} + 7\sqrt{ac}$ faciunt $9\sqrt{ac}$, & $6\sqrt{ab - xx} + 7\sqrt{ab - xx}$ faciunt $13\sqrt{ab - xx}$. Et ad eundem modum $6\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$ faciunt $13\sqrt{3}$. Quinetiam $a\sqrt{ac} + b\sqrt{ac}$ faciunt $\overline{a + b}\sqrt{ac}$, additis nempe a & b tanquam si essent numeri multiplicantes $\sqrt{ac}$. Et sic $\overline{2a + 3c}\sqrt{\frac{3axx - x^3}{a + x}} + 3a\sqrt{\frac{3axx - x^3}{a + x}}$ faciunt $\overline{5a + 3c}\sqrt{\frac{3axx - x^3}{a + x}}$ eo quod $2a + 3c$ & $3a$ faciant $5a + 3c$.

Fractiones affirmativæ quarum idem est denominator, uniuntur addendo numeratores. Sic $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ faciunt $\frac{3}{5}$, & $\frac{2ax}{b} + \frac{3ax}{b}$ faciunt $\frac{5ax}{b}$ & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}} + \frac{17a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}}$ faciunt $\frac{25a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}}$, & $\frac{aa}{c} + \frac{bx}{c}$ faciunt $\frac{aa + bx}{c}$.

Negativæ quantitates eodem modo adduntur ac affirmativæ. Sic -2 & -3 faciunt -5; $-\frac{4ax}{b}$ & $-\frac{11ax}{b}$ faciunt $-\frac{15ax}{b}$; $-a\sqrt{ax}$ & $-b\sqrt{ax}$ faciunt $-\overline{a - b}\sqrt{ax}$. Ubi verò *negativa quantitas affirmativæ adjicienda est*, oportet affirmativam negativa diminuere. Sic 3 & -2 faciunt 1; $\frac{11ax}{b}$ & $-\frac{4ax}{b}$ faciunt $\frac{7ax}{b}$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$

faciunt

faciunt $\overline{b-a}\sqrt{ac}$. Et nota quod ubi negativa quantitas excedit affirmativam, aggregatum erit negativum. Sic 2 & -3 faciunt -1; $-\frac{11ax}{b}$ & $\frac{4ax}{b}$ faciunt $-\frac{7ax}{b}$, ac $2\sqrt{ac}$ & $-7\sqrt{ac}$ faciunt $-5\sqrt{ac}$.

In additione aut plurium aut magis compositarum quantitatum, convenit observare formam operationis supra in additione numerorum expositam. Quemadmodum si $17ax-14a+3$, & $4a+2-8ax$ & $7a-9ax$ addendæ sunt, dispono eas in serie descendente ita scilicet ut termini maxime affines stent in iisdem columnis. Nempe numeri 3 & 2 in una columna, species $-14a$ & $4a$ & $7a$ in alia columna, atque species $17ax$ & $-8ax$ & $-9ax$ in tertia. Dein terminos cujusque columnæ sigillatim addo dicendo 2 & 3 faciunt 5 quod subscribo, dein $7a$ & $4a$ faciunt $11a$ & insuper $-14a$ facit $-3a$ quod iterum subscribo, denique $-9ax$ & $-8ax$ faciunt $-17ax$ & insuper $17ax$ facit 0. Adeoque prodit summa $-3a+5$.

$$\begin{array}{rrr} 17ax & -14a & +3 \\ -8ax & +4a & +2 \\ -9ax & +7a & \\ \hline * & -3a & +5 \end{array}$$

Eadem methodo res in sequentibus exemplis absolvitur.

$$\begin{array}{r} 12x+7a \\ 7x+9a \\ \hline 19x+16a \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11bc-7\sqrt{ac} \\ 15bc+2\sqrt{ac} \\ \hline 26bc-5\sqrt{ac} \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\frac{4ax}{b}+6\sqrt{3}+\frac{1}{5} \\ +\frac{11ax}{b}-7\sqrt{3}+\frac{2}{5} \\ \hline \frac{7ax}{b}-\sqrt{3}+\frac{3}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6xx+\frac{3}{7}x \\ 5x^3\quad+\frac{5}{7}x \\ \hline 5x^3-6xx+\frac{8}{7}x \end{array} \qquad \begin{array}{r} aay+2a^3-\frac{a^4}{2y} \\ -2ayy-4aay+a^3 \\ y^3+2ayy-\frac{1}{2}aay \\ \hline y^3 \quad * -3\frac{1}{2}aay+3a^3-\frac{a^4}{2y} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x^4+2ax^3 \\ -3x^4-2ax^3+8\frac{1}{4}a^3\sqrt{aa+xx} \\ -2x^4+5bx^3-20\,a^3\sqrt{aa-xx} \\ -4bx^3-7\frac{1}{4}a^3\sqrt{aa+xx} \\ \hline * + bx^3+a^3\sqrt{aa+xx} \\ -20\,a^3\sqrt{aa-xx}. \end{array}$$

DE SUBDUCTIONE.

NUmerorum *non nimis compoſitorum* inventio etiam Differentiæ per ſe patet. Quemadmodum quod 9 de 17 relinquat 8. At in *magis compoſitis* Subductio fieri ſolet *ſubſcribendo numerum ablativum & ſigillatim auferendo figuras inferiores de ſuperioribus.* Sic ad auferendum 63543 de 782579, ſubſcripto 63543, dic 3 de 9 relinquit 6, quod ſcribe infra: Dein 4 de 7 relinquit 3 quod pariter ſcribe infra: Tum 5 de 5 relinquit 0 quod itidem ſubſcribe: Poſtea 3 de 2 auferendum eſt, ſed cum 3 ſit majus, figura 1 à proxima figura 8 mutuò ſumi debet, quæ una cum 2 faciat 12, à quo auferri poteſt 3, & reſtat 9, quod inſuper ſubſcribe: Adhæc cùm præter 6 etiam 1 de 8 auferendum ſit, adde 1 ad 6, & ſumma 7 de 8 relinquet 1 quod etiam ſubſcribe. Denique cùm in inferiori numero nihil reſtet auferendum de ſuperiori 7, ſubſcribe etiam 7, & ſic tandem habes differentiam 719036.

$$\begin{array}{r} 782579 \\ 63543 \\ \hline 719036 \end{array}$$

Cæterùm omnino cavendum eſt ut figuræ numeri ablativi

tivi ſubſcribantur in locis homogeneis; nempe unitates infra alterius numeri unitates, deni numeri infra denos, decimæ partes infra decimas, *&c.* Sicut in Additione dictum eſt. Sic ad auferendum decimalem o'63 ab integro 547, non diſpones numeros hoc modo $\begin{smallmatrix}547\\0'63\end{smallmatrix}$; ſed ſic $\begin{smallmatrix}547&\\0&'63\end{smallmatrix}$, ita nempe ut circulus qui locum unitatum in decimali occupat, ſubjiciatur unitatibus alterius numeri. Tum, circulis in locis vacuis ſuperioris numeri ſubintellectis, dic 3 de o auferendum eſſe, ſed cùm nequeat, debet 1 de loco anteriori mutuo ſumi ut o evadat 10 à quo 3 auferri poteſt & dabit 7, quod infra ſcribe. Dein illud 1 quod mutuò ſumitur, adjectum 6 facit 7, & hoc de ſuperiore o auferendum eſt; ſed cùm nequeat, debet iterum 1 de loco anteriori ſumi ut o evadat 10, & 7 de 10 relinquet 3, quod ſimiliter infra ſcribendum eſt. Tum illud 1 adjectum o facit 1, & hoc 1 de 7 relinquit 6, quod itidem ſubſcribe. Denique figuras etiam 54, ſiquidem de illis nihil amplius auferendum reſtat, ſubſcribe, & habebis reſiduum 546'37.

547
o'63
546'37

Exercitationis gratia plura tum in integris tum in decimalibus numeris exempla ſubjecimus.

1673	1673	458074	35'72	46,5003	308,7
1541	1580	9205	14'32	3,078	25,74
132	93	448869	21'4	43,4223	282,96

Siquando major numerus de minori auferendus eſt, oportet minorem de majore auferre, & reſiduo præfigere negativum ſignum. Veluti ſi auferendum ſit 1673 de 1541, è contra aufero 1541 de 1673, & reſiduo 132 præfigo ſignum —.

In terminis Algebraicis Subductio *fit connectendo quantitates cum ſignis omnibus quantitatis ſubducendæ mutatis, & inſuper uniendo quæ poſſunt uniri*, perinde ut in Additione factum eſt. Sic $+7a$ de $+9a$ relin-

relinquit $+9a-7a$ five $2a$; $-7a$ de $+9a$ relinquit $+9a+7a$ five $16a$; $+7a$ de $-9a$ relinquit $-9a-7a$ five $-16a$; & $-7a$ de $-9a$ relinquit $-9a+7a$ five $-2a$. Sic $3\frac{a}{c}$ de $5\frac{a}{c}$ relinquit $2\frac{a}{c}$; $7\sqrt{ac}$ de $2\sqrt{ac}$ relinquit $-5\sqrt{ac}$; $\frac{2}{9}$ de $\frac{5}{9}$ relinquit $\frac{3}{9}$; $-\frac{4}{7}$ de $\frac{3}{7}$ relinquit $\frac{7}{7}$; $-\frac{2ax}{b}$ de $\frac{3ax}{b}$ relinquit $\frac{5ax}{b}$; $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ de $\frac{-17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ relinquit $\frac{-25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$; $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bx}{c}$ relinquit $\frac{bx-aa}{c}$; $a-b$ de $2a+b$ relinquit $2a+b-a+b$ five $a+2b$; $3az-zz+ac$ de $3az$ relinquit $3az-3az+zz-ac$ five $zz-ac$; $\frac{2aa-ab}{c}$ de $\frac{aa+ab}{c}$ relinquit $\frac{aa+ab-2aa+ab}{c}$ five $\frac{-aa+2ab}{c}$: Et $\overline{a-x}\sqrt{ax}$ de $\overline{a+x}\sqrt{ax}$ relinquit $\overline{a+x-a+x}\sqrt{ax}$ five $2x\sqrt{ax}$. Et fic in aliis.

Cæterùm ubi quantitates pluribus terminis conftant, operatio perinde ac in numeris inftitui poteft. Id quod in fequentibus exemplis videre eft.

$$\begin{array}{l} 12x+7a \\ 7x+9a \\ \hline 5x-2a \end{array} \qquad \begin{array}{l} 15bc+2\sqrt{ac} \\ -11bc+7\sqrt{ac} \\ \hline 26bc-5\sqrt{ac} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5x^3+\frac{5}{7}x \\ 6xx-\frac{3}{7}x \\ \hline 5x^3-6xx+\frac{8}{7}x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{11ax}{b}-7\sqrt{3}+\frac{2}{5} \\ \frac{4ax}{b}-6\sqrt{3}-\frac{1}{5} \\ \hline \frac{7ax}{b}-\sqrt{3}+\frac{3}{5} \end{array}$$

De Multiplicatione.

NUmeri qui ex Multiplicatione duorum quorumvis numerorum non majorum quàm 9 oriuntur, memoriter addiſcendi ſunt. Veluti quod 5 in 7, facit 35, quòdque 8 in 9 facit 72, *&c.* Deinde majorum numerorum multiplicatio ad horum exemplorum normam inſtituetur.

Si 795 per 4 multiplicare oportet ſubſcribe 4, ut vides. Dein dic, 4 in 5 facit 20, cujus poſteriorem figuram 0 ſcribe infra 4, priorem vero 2 reſerva in proximam operationem. Dic itaque præterea 4 in 9 facit 36, cui adde præfatum 2 & fit 38, cujus poſteriorem figuram 8 ut ante ſubſcribe, & priorem 3 reſerva. Denique dic 4 in 7 facit 28 cui adde prædictum 3 & fit 31. Eoque pariter ſubſcripto habebitur 3180 numerus qui prodit multiplicando totum 795 per 4.

795
4
———
3180

Porrò ſi 9043 multiplicandus eſt per 2305, ſcribe alterutrum 2305 infra alterum 9043 ut ante, & multiplica ſuperiorem 9043 primò per 5 pro more oſtenſo, & emerget 45215, dein per 0 & emerget 0000, tertiò per 3 & emerget 27129, denique per 2 & emerget 18086. Hoſque ſic emergentes numeros in ſerie deſcendente ita ſcribe, ut cujuſque inferioris ultima figura ſit uno loco proprior ſiniſtræ quàm ultima ſuperioris. Tandem hos omnes adde & orietur 20844115, numerus qui fit multiplicando totum 9043 per totum 2305.

9043
2305
———
45215
0000
27129
18086
————
20844115

Decimales numeri per integros vel per alios decimales perinde multiplicantur, ut vides in his exemplis.

72,4

72,4	50,18	3,9025
29	2,75	0,0132
6516	25090	78050
1448	35126	117075
	10036	39025
2099,6	137,9950	0,05151300

Sed nota quod *in prodeunte numero tot semper figuræ ad dextram pro decimalibus abscindi debent quot sunt figuræ decimales in utroque numero multiplicante.* Et si fortè non sint tot figuræ in prodeunte numero, deficientes loci circulis adimplendi sunt, ut hic fit in exemplo tertio.

Simplices termini Algebraici multiplicantur ducendo numeros in numeros & species in species ac statuendo factum Affirmativum *si ambo factores sint affirmativi aut ambo negativi, &* Negativum *si secus.*

Sic $2a$ in $3b$ vel $-2a$ in $-3b$ facit $6ab$; vel $6ba$: Nihil enim refert quo ordine ponantur. Sic etiam $2a$ in $-3b$ vel $-2a$ in $3b$ facit $-6ab$. Et sic $2ac$ in $8bcc$ facit $16abccc$ sive $16abc^3$; & $7axx$ in $-12aaxx$ facit $-84a^3x^4$; & $-16cy$ in $31ay^3$ facit $-496acy^4$; & $-4z$ in $-3\sqrt{az}$ facit $12z\sqrt{az}$. Atque ita 3 in -4 facit -12 & -3 in -4 facit 12.

Fractiones multiplicantur ducendo numeratores in numeratores ac denominatores in denominatores. Sic $\frac{2}{5}$ in $\frac{3}{7}$ facit $\frac{6}{35}$; & $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ facit $\frac{ac}{bd}$; & $2\frac{a}{b}$ in $3\frac{c}{d}$ facit $6 \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ seu $6\frac{ac}{bd}$; & $\frac{3acy}{2bb}$ in $\frac{-7cyy}{4b^3}$ facit $\frac{-21accy^3}{8b^5}$; & $\frac{-4z}{c}$ in $\frac{-3\sqrt{az}}{c}$

facit $\frac{12z\sqrt{az}}{cc}$ & $\frac{a}{b}x$ in $\frac{c}{d}xx$ facit $\frac{ac}{bd}x^3$. Item 3 in $\frac{2}{5}$ facit $\frac{6}{5}$ ut pateat si 3 reducatur ad formam fractionis $\frac{3}{1}$ adhibendo unitatem pro Denominatore. Et sic $\frac{15aaz}{cc}$ in $2a$ facit $\frac{30a^3z}{cc}$. Unde obiter nota quod $\frac{ab}{c}$ & $\frac{a}{c}b$ idem valent; ut & $\frac{abx}{c}$, $\frac{ab}{c}x$ & $\frac{a}{c}bx$ nec non $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$ & $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$, & sic in aliis.

Quantitates radicales ejusdem denominationis (hoc est, si sint ambæ radices quadraticæ, aut ambæ cubicæ, aut ambæ quadrato-quadraticæ, &c.) multiplicantur ducendo terminos in se invicem sub eodem signo radicali. Sic $\sqrt{3}$ in $\sqrt{5}$ facit $\sqrt{15}$, & $\sqrt{ab}$ in $\sqrt{cd}$ facit $\sqrt{abcd}$. Et $\sqrt{^3}\,5ayy$ in $\sqrt{^3}\,7ayz$ facit $\sqrt{^3}\,35aay^3z$. Et $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ in $\sqrt{\frac{abb}{c}}$ facit $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ hoc est * $\frac{aab}{c}$. Et $2a\sqrt{az}$ in $3b\sqrt{az}$ facit $6ab\sqrt{aazz}$ hoc est $6aabz$. Et $\frac{3xx}{\sqrt{ac}}$ in $\frac{-2x}{\sqrt{ac}}$ facit $\frac{-6x^3}{\sqrt{aacc}}$ hoc est $\frac{-6x^3}{ac}$. Et $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$ in $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ facit $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$.

* Vide Cap. *De Notatione.*

Quantitates pluribus partibus constantes multiplicantur ducendo singulas unius partes in singulas alterius, perinde ut in Multiplicatione numerorum ostensum est. Sic $c-x$ in a facit $ac-ax$, & $aa+2ac-bc$ in $a-b$ facit $a^3+2aac-aab-3bac+bcc$. Nam $aa+2ac-bc$ in $-b$ facit $-aab-2acb+bbc$, & in a facit a^3+

$2aac-$

$2aac - abc$, quorum summa est $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$. Hujus multiplicationis specimen unà cum aliis consimilibus exemplis subjectum habes.

$$\begin{array}{r} aa + 2ac - bc \\ a - b \\ \hline -aab - 2abc + bbc \\ a^3 + 2aac - abc \\ \hline a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + bb \\ aa + ab \\ \hline aa + 2ab + bb \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline -ab - bb \\ aa + ab \\ \hline aa \quad * - bb \end{array} \qquad \begin{array}{r} yy + 2ay - \tfrac{1}{2}aa \\ yy - 2ay + aa \\ \hline aayy + 2a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 \\ -2ay^3 - 4aayy + a^3y \\ y^4 + 2ay^3 - \tfrac{1}{2}aayy \\ \hline y^4 \quad * - 3\tfrac{1}{2}aayy + 3a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{a^3}{c}}. \\ 3a + \sqrt{\frac{abb}{c}} \\ \hline \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}} - \frac{aab}{c} \\ \frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} \\ \hline \frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} + \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}} - \frac{aab}{c}. \end{array}$$

De DIVISIONE.

Divisio in numeris instituitur quærendo quot vicibus Divisor in Dividendo continetur, totiesque auferendo, & scribendo totidem unitates in Quoto. Idque iteratò si opus est, quamdiu divisor auferri potest.

Sic ad dividendum 63 per 7, quære quoties 7 continetur in 63 & emergent 9 pro quoto præcisè. Adeoque $\frac{63}{7}$ valet 9. Insuper ad dividendum 371 per 7, præfige divisorem 7, & imprimis opus instituens in initialibus figuris Dividendi proximè majoribus Divisore, nempe in 37, dic quoties 7 continetur in 37? Resp. 5. Tum scripto 5 in Quoto, aufer 5 × 7 seu 35 de 37, & restabit 2, cui adnecte ultimam figuram Dividendi nempe 1, & fit 21 reliqua pars Dividendi, in qua proximum opus instituendum est. Dic itaque ut ante quoties 7 continetur in 21? Resp. 3. Quare scripto 3 in Quoto, aufer 3 × 7 seu 21 de 21 & restabit 0. Unde constat 53 esse numerum præcisè qui oritur ex divisione 371 per 7.

```
7) 371 (53
   35
   --
    21
    21
    --
     0
```

Atque ita ad dividendum 4798 per 23, opus primò instituens in initialibus figuris 47 dic quoties 23 continetur in 47? Resp. 2. Scribe ergo 2 in Quoto, & de 47 subduc 2 × 23 seu 46, restatque 1, cui subjunge proximum numerum Dividendi, nempe 9, & fit 19 in subsequens opus. Dic itaque quoties 23 continetur in 19? Resp. 0. Quare scribe 0 in Quoto; & de 19 subduc 0 × 23 seu 0; & restat 19, cui subjunge ultimum numerum 8, & fit 198 in proximum opus. Quamobrem dic ultimò quoties 23 continetur in 198, (id quod ex initialibus numeris 2 & 19 conjici potest animadvertendo

madvertendo quoties 2 continetur in 19)? Reſp. 8. Quare ſcribe 8 in Quoto & de 198 ſubduc 8 × 23 ſeu 184, reſtabitque 14 adhuc dividendus per 23. Adeoque Quotus erit $208\frac{14}{23}$. Quod ſi hujuſmodi fractio minùs placeat, poſſis Diviſionem in Fractionibus decimalibus ultra ad libitum proſequi, ſemper adnectendo circulum numero reſiduo. Sic reſiduo 14 adnecte 0, fitque 140. Tum dic quoties 23 ſit in 140? Reſp. 6. Scribe ergo 6 in Quoto; & de 140 ſubduc 6 × 23 ſeu 138, & reſtabit 2, cui adnecte 0 ut ante. Et ſic, opere ad arbitrium continuato, emerget tandem Quotus 208,6086, &c.

```
23) 4798 (208,6086, &c.
    46
    ——
     19
     00
     ——
     198
     184
     ———
      140
      138
      ———
        20
        00
        ——
        200
        184
        ———
         160
```

Ad eundem modum fractio decimalis 3,5218 per fractionem decimalem 46, 1 dividitur, & prodit 0, 07639, &c. *Ubi nota quod in Quoto tot figuræ pro decimalibus abſcindendæ ſunt quot ſunt in ultimo dividuo plures quam in diviſore:* Ut in hoc exemplo quinque, quia ſex ſunt in ultimo dividuo 0,004370 & una in Diviſore 46,1.

```
46,1) 3,5218 (0,07639
      322,7
      —————
       2948
       2766
       ————
        1820
        1383
        ————
         4370
```

Exempla plura lucis gratia subjunximus.

```
9043) 20844115 (2305.        72,4) 2099,6 (29
      18086                        1448
      -----                        ----
       27581                        6516
       27129                        6516
       -----                        ----
         45215                         0
         45215
         -----
             0

50,18) 137,995 (2,75.      0,0132) 0,051513 (3,9025
       10036                       396
       -----                       ----
        37635                       1191
        35126                       1188
        -----                       ----
         25090                        330
         25090                        264
         -----                        ---
             0                         660
                                       660
                                       ---
                                         0
```

In terminis Algebraicis Divisio fit resolvendo quicquid per multiplicationem conflatur. Sic ab divis. per a dat b pro quoto, $6ab$ div. per $2a$ dat $3b$; & div. per $-2a$ dat $-3b$. $-6ab$ div. per $2a$ dat $-3b$; & div. per $-2a$ dat $3b$. $16abc^3$ div. per $2ac$ dat $8bcc$. $-84a^3x^4$ div. per $-12aaxx$ dat $7axx$. Item $\frac{6}{35}$ div. per $\frac{2}{5}$ dat $\frac{3}{7}$. $\frac{ac}{bd}$ div. per $\frac{a}{b}$ dat $\frac{c}{d}$. $\frac{-21accy^3}{8b^5}$ div. per $\frac{3acy}{2bb}$ dat $\frac{-7cyy}{4b^3}$. $\frac{6}{5}$ div. per

3 dat

3 dat $\frac{2}{5}$; & viciſſim $\frac{6}{5}$ div. per $\frac{2}{5}$ dat $\frac{3}{1}$ ſeu 3. $\frac{30a^3z}{cc}$ div. per $2a$ dat $\frac{15aaz}{cc}$; & viciſſim diviſ. per $\frac{15aaz}{cc}$ dat $2a$. Item $\sqrt{15}$ div. per $\sqrt{3}$ dat $\sqrt{5}$. $\sqrt{abcd}$ div. per $\sqrt{cd}$ dat $\sqrt{ab}$. $\sqrt{a^3c}$ per $\sqrt{ac}$ dat $\sqrt{aa}$ ſeu a. $\sqrt{3:}\,35aay^3z$ div. per $\sqrt{3:}\,5ayy$ dat $\sqrt{3:}\,7ayz$. $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ div. per $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ dat $\sqrt{\frac{abb}{c}}$. $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$ div. per $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ dat $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$. Atque ita $\overline{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $a+b$ dat $\sqrt{ax}$, & viciſſim div. per $\sqrt{ax}$ dat $a+b$. Et $\frac{a}{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $\frac{1}{a+b}$ dat $a\sqrt{ax}$; vel div. per a dat $\frac{1}{a+b}\sqrt{ax}$ ſive $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$; & viciſſim div. per $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$ dat a. Cæterùm in hujuſmodi reſolutionibus omninò cavendum eſt ut quantitates ſint ejuſdem ordinis quæ ad invicem applicantur. Nempe ut numeri applicentur ad numeros, ſpecies ad ſpecies, radicales ad radicales, numeratores Fractionum ad Numeratores ac Denominatores ad Denominatores, nec non in Numeratoribus, Denominatoribus, & Radicalibus quantitates cujuſque generis ad quantitates homogeneas.

Quod ſi quantitas dividenda nequeat ſic per diviſorem reſolvi, ſufficit ubi ambæ quantitates ſunt integræ ſubſcribere Diviſorem cum lineola interjecta. Sic ad dividendum ab per c ſcribitur $\frac{ab}{c}$; & ad dividendum $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ per a ſcribitur $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$ vel

$a+b$

$\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$. Et ſic $\sqrt{ax-xx}$ diviſ. per $\sqrt{cx}$ dat $\frac{\sqrt{ax-xx}}{\sqrt{cx}}$ ſive $\sqrt{\frac{ax-xx}{cx}}$. Et $\overline{aa+ab}\,\sqrt{aa-2xx}$ diviſ. per $\overline{a-b}\,\sqrt{aa-xx}$ dat $\frac{aa+ab}{a-b}\sqrt{\frac{aa-2xx}{aa-xx}}$. Et $12\sqrt{5}$ div. per $4\sqrt{7}$ dat $3\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Ubi vero fracta ſunt illæ quantitates, Duc Numeratorem Dividendæ quantitatis in Denominatorem Diviſoris ac Denominatorem in Numeratorem, & *factus prior* erit Numerator, ac *poſterior* Denominator Quoti. Sic ad dividendum $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ ſcribitur $\frac{ad}{bc}$, multiplicato ſcilicet a per d & b per c. Parique ratione $\frac{3}{7}$ diviſ. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{35}$ & $\frac{3a}{4c}\sqrt{ax}$ diviſ. per $\frac{2c}{5a}$ dat $\frac{15aa}{8cc}\sqrt{ax}$; diviſ. autem per $\frac{2c\sqrt{aa-xx}}{5a\sqrt{ax}}$ dat $\frac{15a^3x}{8cc\sqrt{aa-xx}}$. Et ad eundem modum $\frac{ad}{b}$ diviſ. per c (ſive per $\frac{c}{1}$) dat $\frac{ad}{bc}$. Et c (ſive $\frac{c}{1}$) diviſ. per $\frac{ad}{b}$ dat $\frac{bc}{ad}$. Et $\frac{3}{7}$ div. per 5 dat $\frac{3}{35}$. Et 3 div. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{5}$. Et $\frac{a+b}{c}\sqrt{cx}$ div. per a dat $\frac{a+b}{ac}\sqrt{cx}$. Et $\overline{a+b}\,\sqrt{cx}$ div. per $\frac{a}{c}$ dat $\frac{ac+bc}{a}\sqrt{cx}$. Et $2\sqrt{\frac{axx}{c}}$ diviſ. per $3\sqrt{cd}$ dat

$\frac{2}{3}\sqrt{axx}$

$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{axx}{ccd}}$; Div. autem per $3\sqrt{\frac{cd}{x}}$ dat $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{ax^3}{ccd}}$. Et $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{7}{11}}$ divis. per $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ dat $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{49}{33}}$. Et sic in aliis.

Quantitas ex pluribus terminis composita dividitur applicando singulos ejus terminos ad Divisorem. Sic $aa + 3ax - xx$ divisum per a dat $a + 3x - \frac{xx}{a}$.

At ubi Divisor etiam ex pluribus terminis constat, divisio perinde ac in Numeris institui debet. Sic ad dividendum $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$ per $a - b$, Dic quoties a continetur in a^3, nempe primus terminus Divisoris in primo Dividendi? Resp. aa. Quare scribe aa in Quoto & ablato $a - b$ in aa sive $a^3 - aab$ de Dividendo, restabit $2aac - 3abc + bbc$ adhuc dividendum. Dic itaque rursus quoties a continetur in $2aac$? Resp. $2ac$. Quare scribe etiam $2ac$ in Quoto, & ablato $a - b$ in $2ac$ sive $2aac - 2abc$ de præfato Residuo, restabit etiamnum $-abc + bbc$. Quamobrem dic iterum quoties a continetur in $-abc$? Resp. $-bc$. Et proinde scribe $-bc$ in Quoto, & ablato denuo $a - b$ in $-bc$ sive $-abc + bbc$ de novissimo Residuo, restabit nihil. Quod indicat Divisionem peractam esse, prodeunte Quoto $aa + 2ac - bc$.

Cæterum ut hujusmodi operationes ad formam qua in Divisione numerorum usi sumus debitè reducantur, *termini tum dividendæ quantitatis tum Divisoris juxta dimensiones literæ alicujus quæ ad hanc rem maximè idonea judicabitur, in ordine disponendi sunt*, ita nempe ut illi primum locum occupent in quibus litera ista est plurimarum dimensionum, iique secundum in quibus dimensiones ejus ad maximas proximæ sunt; Et sic deinceps usque ad terminos qui per literam istam non omnino multiplicantur, adeoque ultimum locum occupabunt. Sic in allato Exemplo si termini ordinentur juxta dimensiones

ones literæ a, formam operis exhibebit adjunctum

$$a-b)\,a^3 {+2aac \atop -aab} -3abc+bbc(aa+2ac-bc$$

$$a^3 - aab$$

$$0 + 2aac - 3abc$$
$$2aac - 2abc$$

$$0 - abc + bbc$$
$$- abc + bbc$$

$$0 \quad 0$$

Diagramma: Ubi videre est quod terminus a^3 sive a trium dimensionum occupat primum locum dividendæ quantitatis, terminique ${2aac \atop -aab}$ in quibus a est duarum dimensionum secundum occupat, & sic præterea. Potuit etiam dividenda quantitas sic scribi $a^3 {+2c \atop -b} aa - 3bca + bbc$. Ubi termini secundum locum occupantes, uniuntur aggregando factores literæ juxta quam fit ordinatio. Et hoc modo si termini juxta dimensiones literæ b disponerentur, opus sicut in proximo Diagrammate institui deberet, Cujus explicationem adnectere visum est.

$$-b+a)\,cbb {-3ac \atop -aa} b {+a^3 \atop +2aac} \left(-cb {+2ac \atop +aa}\right.$$

$$cbb - acb$$

$$0 {-2ac \atop -aa} b {+a^3 \atop +2aac}$$
$${-2ac \atop -aa} b {+2aac \atop +a^3}$$

$$0 \quad 0$$

Dic

Dic quoties $-b$ continetur in cbb? Resp. $-cb$. Quare scripto $-cb$ in Quoto, aufer $-b+a$ in $-cb$ seu $bbc-abc$ & restabit in secundo loco $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b$. Residuo huic adnecte, si placet, quantitates in ultimo loco, nempe $\begin{matrix}a^3\\+2aac,\end{matrix}$ & dic iterum quoties $-b$ continetur in $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b$? Resp. $\begin{matrix}+2ac.\\+aa.\end{matrix}$ Quare his in Quoto scriptis, aufer $-b+a$ in $\begin{matrix}+2ac\\+aa\end{matrix}$ seu $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b$ $\begin{matrix}+2aac\\+a^3\end{matrix}$ & restabit nihil. Unde constat divisionem peractam esse, prodeunte Quoto $-cb+2ac+aa$ ut ante.

Atque ita si dividere oportet $aay^4-aac^4-yyc^4+y^6-2y^4cc-a^6-2a^4cc-a^4yy$ per $yy-aa-cc$: Quantitates juxta literam y ad hunc modum ordino, $yy\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}\Big)\, y^6\begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}yy\begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc.\\-aac^4\end{matrix}$

Dein Divisionem ut in subjecto Diagrammate instituo. Adjiciuntur & alia exempla, de quibus insuper observandum est quod ubi dimensiones literæ ad quam ordinatio fit, non in eadem ubique progressione Arithmetica sed per saltum alicubi procedunt, locis vacuis substituitur nota *

$$yy\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}\Big)\, y^6\begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}yy\begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{matrix}$$

$$y^6\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}y^4 \qquad \Big(y^4\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}yy\begin{matrix}+a^4\\+aacc.\end{matrix}$$

$$0\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}y^4$$

$+2aa$

$$\begin{array}{l} \left.\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}\right\} y^4 \begin{matrix}-2a^4\\-aaccyy\\+c^4\end{matrix} \\ \hline \quad o \quad \left.\begin{matrix}+a^4\\+aacc\end{matrix}\right\} yy \\ \quad\quad \left.\begin{matrix}+a^4\\+aacc\end{matrix}\right\} yy \begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{matrix} \\ \hline \quad\quad o \quad\quad o \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+b)\; aa * -bb\;(a-b \\ aa \quad +ab \\ \hline o \quad -ab \\ \quad\;\; -ab-bb \\ \hline \quad\;\; o \quad\quad o \end{array}$$

$$\begin{array}{l} yy-2ay+aa) \qquad\qquad\qquad (yy+2ay-\tfrac{1}{2}aa \\ \quad y^4 \quad * -3\tfrac{1}{2}aayy+3a^3y-\tfrac{1}{2}a^4 \\ \hline \quad y^4-2ay^3+\;\;aayy \\ \hline \quad o+2ay^3-4\tfrac{1}{2}aayy \\ \quad\;\; +2ay^3-4\,aayy+2a^3y \\ \hline \quad\quad o-\tfrac{1}{2}aayy+\;a^3y \\ \quad\quad\;\; -\tfrac{1}{2}aayy+\;a^3y-\tfrac{1}{2}a^4 \\ \hline \quad\quad\quad o \quad\quad o \quad\quad o \end{array}$$

$$\begin{array}{l} aa+ab\sqrt{2}+bb) \qquad\qquad (aa-ab\sqrt{2}+bb \\ \quad a^4 \quad * \quad * \quad * \quad +b^4 \\ \hline \quad a^4+a^3b\sqrt{2}+aabb \\ \hline \quad\;\; -a^3b\sqrt{2}-aabb \\ \quad\;\; -a^3b\sqrt{2}-2aabb-ab^3\sqrt{2} \\ \hline \quad\quad\quad +aabb+ab^3\sqrt{2} \\ \quad\quad\quad +aabb+ab^3\sqrt{2}+b^4 \\ \hline \quad\quad\quad\quad o \quad\quad o \quad\quad o \end{array}$$

Aliqui Divisionem incipiunt ab ultimis terminis, sed eodem recidit si inverso terminorum ordine incipiatur à prioribus. Sunt & aliæ methodi dividendi sed facillimam & commodissimam nosse sufficit.

De EXTRACTIONE RADICUM.

CUM numeri alicujus *radix quadratica* extrahi debet, *is in locis alternis, incipiendo ab unitate, punctis notandus eſt; Dein figura in Quoto ſeu Radice ſcribenda cujus quadratum figuræ vel figuris ante primum punctum aut æquale ſit aut proximè minus. Et ablato illo quadrato, cæteræ radicis figuræ ſigillatim invenientur dividendo reſiduum per duplum radicis eatenus extractæ, & ſingulis vicibus auferendo è reſiduo illo factum à figura noviſſimè prodeunte & decuplo prædicti Diviſoris figura illa aucti.*

Sic ad extrahendam radicem ex 99856, imprimis nota cum punctis ad hunc modum 9'98'56. Dein quære numerum cujus quadratum æquatur primæ figuræ 9, nempe 3; ſcribeque in Quoto. Et de 9 ablato quadrato 3 × 3 ſeu 9, reſtabit 0; cui adnecte figuras ante proximum punctum, nempe 98 pro ſequente opere. Tum neglecta ultima figura 8, dic quoties duplum 3 ſeu 6 continetur in priori 9? Reſp. 1. Quare ſcripto 1 in Quoto, aufer factum 1 × 61 ſeu 61 de 98 reſtabit 37, cui adnecte ultimas figuras 56, & fiet 3756 numerus in quo opus denuo inſtitui debet. Quare & hujus ultima figura 6 neglecta, dic quoties duplum 31 ſeu 62 continetur in 375 (id quod ex initialibus figuris 6 & 37 conjici poteſt animadvertendo quoties 6 continetur in 37?) Reſp. 6. Et ſcripto 6 in Quoto aufer factum 6 × 626 ſeu 3756, & reſtabit nihil. Unde conſtat opus peractum eſſe; prodeunte Radice 316.

9'98'56 (316
9
——
098
61
——
3756
3756
——
0

Atque

Atque ita si radicem ex 22178791 extrahere oportet, imprimis facta punctatione quære numerum cujus quadratum, (siquidem id nequeat æquari) sit proxime minus figuris 22 antecedentibus primum punctum, & invenies esse 4. Nam 5×5 sive 25 majore est quam 22, & 4×4 sive 16 minor. Quare 4 erit prima figura radicis. Et hac itaque in Quoto scripta, de 22 aufer quadratum 4×4 seu 16, residuoque 6 adjunge desuper proximas figuras 17, & habebitur 617, cujus divisione per duplum 4 elicienda est secunda figura radicis. Nempe, neglecta ultima figura 7, dic quoties 8 continetur in 61? Resp. 7. Quare scribe 7 in Quoto, & de 617 aufer factum 7 in 87 seu 609 & restabit 8, cui adjunge proximas duas figuras 87, & habebitur 887, cujus divisione per duplum 47 seu 94 elicienda est tertia figura. Utpote dic quoties 94 continetur in 88? Resp. 0. Quare scribi 0 in quoto, adjungeque ultimas duas figuras 91, & habebitur 88791 cujus divisione per duplum 470 seu 940 elicienda est ultima figura. Nempe dic quoties 940 continetur in 8879?

```
22'17'87'91 (4709,43637 &c.
16
——
617
609
——
  88791
  84681
  ——————
    4110.00
    376736
    ———————
     3426400
     2825649
     ———————
      60075100
      56513196
      ————————
       356190400
       282566169
       —————————
        73624231
```

8879? Resp. 9. Quare scribe 9 in Quoto, & radicem habebis 4709.

Cæterum cum factus 9 × 9409 seu 84681 ablatus de 88791 relinquat 4110, id indicio est numerum 4709 non esse radicem numeri 22178791 præcise, sed ea paulo minorem existere. Et in hoc casu aliisque similibus si veram radicem magis appropinquare placeat, prosequenda est operatio in decimalibus numeris, adnectendo ad residuum circulos duos in singulis operationibus. Sic residuum 4110 adnexis circulis, evadit 411000; cujus divisione per duplum 4709 seu 9418 elicietur figura prima decimalis, nimirum 4. Dein scripto 4 in Quoto, aufer 4 × 94184 seu 376736 de 411000 & restabit 34264. Atque ita adnexis iterum duobus circulis, opus pro lubitu continuari potest, prodeunte tandem radice 4709,43637, *&c.*

Ubi vero radix ad medietatem aut ultra extracta est, cæteræ figuræ per divisionem solam obtineri possunt. Ut in hoc exemplo, si radicem ad usque novem figuras extrahere animus esset, postquam quinque priores 4709,4 extractæ sunt, quatuor posteriores 3637 elici possent dividendo residuum 34264 per duplum 4709,4.

Et ad hunc modum si radix ex 32976 ad usque quinque figuras extrahi debet; postquam figuræ punctis notantur, scribe 1 in Quoto, utpote cujus quadratum 1 × 1 seu 1 maximum est quod in 3, figura primum punctum antecedente, continetur. Ac de 3 ablato quadrato illo 1, restabit 2. Dein huic 2 annexis proximis figuris 29. Quære quoties duplum 1 seu 2 continetur in 22, & invenies quidem plusquam 10,

```
      3'29'76(181,59
      1
      ---
      229
      224
      ----
       576
       361
       ----
362) 215 (59
```

 sed

ſed nunquam licet diviſorem vel decies ſumere, imo neque novies in hoc caſu quia factus 9×29 ſive 261 major eſt quam 229 unde deberet auferri. Quare pone tantum 8. Et perinde ſcripto 8 in Quoto, & ablato 8×28 ſive 224 reſtabit 5. Huic inſuper annexis figuris 76, quære quoties duplum 18 ſeu 36 continetur in 57, & invenies 1, adeoque ſcribe 1 in Quoto ac de 576 ablato 1×361 ſeu 361 reſtabit 215. Denique ad cæteras figuras eliciendas divide hunc 215 per duplum 181 ſeu 362 & exibunt figuræ 59, quibus etiam ſcriptis in Quoto, habebitur Radix 181,59.

Eadem methodo radices etiam è decimalibus numeris extrahuntur. Sic ex 329,76 radix eſt 18,159. Et ex 3,2976 radix eſt 1,8159. Et ex 0,032976 radix eſt 0,18159. Et ſic præterea. Sed ex 3297,6 radix eſt 57,4247. Et ex 32,976 radix eſt 5,74247. Atque ita ex 9,9856 radix eſt 3,16. Sed ex 0,99856 radix eſt 0,999279, &c. Quemadmodum è ſubjectis Diagrammis conſtare poteſt.

32·97;6(57,4247, &c.	0;99·85·6(0,999279, &c.
25	81
797	1885
749	1701
4860	18460
4576	17901
1148)284(247	1998) 559 (279

Extractionem radicis cubicæ & aliarum omnium, regula generali comprehendam, praxi potiùs intellectu facili quàm expeditæ conſulens, ne moram in eo quod raró uſu veniet, diſcentibus inferam. *Nimirum*, tertia *quæque figura incipiendo ab unitate, primò punctis*

punctis notanda eſt ſi radix ſit cubica, *aut unaquæque* quinta *ſi ſit* quadrato-cubica, *&c. Dein figura in Quoto ſcribenda eſt cujus maxima poteſtas* (*hoc eſt* cubica *ſi radix ſit* cubica, *aut* quadrato-cubica *ſi radix ſit* quadrato-cubica, *&c.*) *aut æquetur figuræ vel figuris ante primùm punctum, aut proximè minor ſit. Et ablata illa poteſtate, figura proxima elicietur dividendo reſiduum proxima numeri reſolvendi figura auctum, per poteſtatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ poteſtatis, hoc eſt, per* triplum Quadratum *Quoti ſi radix ſit* cubica, *aut per* quintuplum quadrato-quadratum *ſi radix ſit* quadrato-cubica, *&c. Rurſuſque à numero reſolvendo ablata maxima Quoti poteſtate, figura tertia invenietur dividendo reſiduum illud proxima numeri reſolvendi figura auctum per poteſtatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ poteſtatis.* Et ſic in infinitum.

Sic ad extrahendam radicem cubicam ex 13312053, numerus ille primò punctis ad hunc modum 13˙312.053 notandus eſt. Deinde in Quoto ſcribenda eſt illa figura 2 cujus cubus 8, ſiquidem æquari nequeat, proximè minor ſit figuris 13 antecedentibus primum punctum. Et ablato illo cubo reſtabit 5, quod proxima numeri reſolvendi figura 3 auctum, & per triplum quadratum quoti 2 diviſum, quærendo nempe quoties 3 × 4 ſeu 12 continetur in 53, dat 4 pro ſecunda figura Quoti. Sed cùm Quoti 24 prodiret cubus 13824 major quàm qui auferri poſſet de figuris 13312 antecedentibus ſecundum punctum, ſcribi debet tantum 3 in Quoto. Tum

```
      13˙312˙053 (237
      —
  aufer cub. 8
  12) reſtat 53 (4. aut 3.
  ————————————————
     aufer c. 12167
  1587) reſtat 1145 (7.
  ————————————
     aufer c. 13312053
              reſtat 0
```

Quotus 23 in charta aliqua seorsim per 23 multiplicatus dat quadratum 529, quod iterum per 23 multiplicatum dat cubum 12167, & hic de 13312 ablatus relinquit 1145; quod proxima resolvendi numeri figura o auctum, & per triplum quadratum Quoti 23 divisum, quærendo nempe quoties 3 × 529 seu 1587 continetur in 11450, dat 7 pro tertia figura Quoti. Tum Quotus 237 per 237 multiplicatus dat quadratum 56169 quod iterum per 237 multiplicatum dat cubum 13312053, & hic de resolvendo numero ablatus relinquit nihil. Unde patet radicem quæsitam esse 237.

Atque ita ad extrahendam radicem quadrato-cubicam ex 364·30820, punctum ponitur ad quintam figuram, & figura 3, cujus quadrato-cubus 243 proximè minor est figuris 364 antecedentibus punctum istud, scribitur in Quoto. Dein quadrato-cubo 243 de 364 ablato, restat 121

```
              364·30820 (32,5
              ---------
              243
         405) 1213 (2
              ----
              33554432
     5242880) 2876388,0 (5
```

quod proxima resolvendi numeri figura 3 auctum & per quinquies quadrato-quadratum Quoti divisum, quærendo nempe quoties 5 × 81 seu 405 continetur in 1213, dat 2 pro secunda figura. Quotus ille 32 in se ter ductus efficit quadrato-quadratum 1048576, & hoc iterum in 32 ductum efficit quadrato-cubum 33554432; qui à numero resolvendo ablatus relinquit 2876388. Itaque 32 est integra pars radicis, sed non justa radix, & proinde si opus in decimalibus numeris prosequi animus est, residuum circulo auctum dividi debet per quinquies prædictum quadrato-quadratum Quoti, quærendo quoties 5 × 1048576 seu 5242880 continetur in 2876388,0, & prodibit tertia figura

sive

five prima decimalis 5. Atque ita auferendo quadrato-cubum Quoti 32,5 de numero resolvendo ac dividendo residuum per quinquies quadrato-quadratum ejus, erui potest quarta figura. Et sic in infinitum.

Cum radix quadrato-quadratica extrahenda est, oportet bis extrahere radicem quadraticam, eo quod $\sqrt{4}$ *valeat* $\sqrt{2 \times 2}$. *Et cum radix cubo-cubica extrahenda est, oportet extrahere radicem cubicam & ejus radicis radicem quadraticam, eo quod* $\sqrt{6}$ *valeat* $\sqrt{2 \times 3}$: *Unde aliqui radices hasce non cubo-cubicas sed quadrato-cubicas dixere.* Et idem in aliis radicibus quarum indices non sunt numeri primi observandum est.

E simplicibus quantitatibus Algebraicis extractio radicum ex ipsa Notatione patet. Quemadmodum quod $\sqrt{aa}$ sit a, & quod $\sqrt{aacc}$ sit ac, & quod $\sqrt{9aacc}$ sit $3ac$, & quod $\sqrt{49a^4xx}$ sit $7aax$. Atque ita quod $\sqrt{\frac{a^4}{cc}}$ seu $\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{cc}}$ sit $\frac{aa}{c}$, & quod $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ sit $\frac{aab}{c}$, & quod $\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ sit $\frac{3az}{5b}$, & quod $\sqrt{\frac{4}{9}}$ sit $\frac{2}{3}$. Et quod $\sqrt{3}\frac{8b^6}{27a^3}$ sit $\frac{2bb}{3a}$. Et quod $\sqrt{4}aabb$ sit $\sqrt{ab}$. Quinetiam quod $b\sqrt{aacc}$ seu b in $\sqrt{aacc}$ valeat b in ac sive abc. Et quod $3c\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ valeat $3c \times \frac{3az}{5b}$ sive $\frac{9acz}{5b}$. Et quod $\frac{a+3x}{c}\sqrt{\frac{4bbx^4}{81aa}}$ valeat $\frac{a+3x}{c} \times \frac{2bxx}{9a}$ sive $\frac{2abxx+6bx^3}{9ac}$.

Hæc inquam patent siquidem propositas quantitates è radicibus in se ductis produci (ut aa ex a in a, $aacc$ ex ac in ac, $9aacc$ ex $3ac$ in $3ac$, &c.) prima fronte constare potest. Ubi vero quantita-

tes pluribus terminis conſtant, opus perinde ac in numeris abſolvitur. Sic ad extrahendam radicem quadraticam ex $aa + 2ab + bb$, imprimis radicem primi termini aa nempe a ſcribe in Quoto. Et ablato ejus quadrato $a \times a$ reſtabit $2ab + bb$ pro elicienda reliqua parte radicis. Dic itaque quoties duplum quoti ſeu $2a$ continetur in primo reſidui termino $2ab$? Reſp. b. Adeoque ſcribe b in Quoto, & ablato facto b in $\overline{2a + b}$ ſeu $2ab + bb$ reſtabit nihil. Quod indicat opus peractum eſſe, prodeunte radice $a + b$.

$$
\begin{array}{l}
aa + 2ab + bb \,(a + b \\
aa \\
\overline{} \\
0 \quad \overline{2ab + bb} \\
\qquad \overline{2ab + bb} \\
\qquad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

Et ſic ad extrahendam radicem ex $a^4 + 6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4$, imprimis pone in Quoto radicem primi termini a^4 nempe aa, & ablato ejus quadrato $aa \times aa$ ſeu a^4 reſtabit $6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4$ pro reliqua radice elicienda. Dic itaque quoties $2aa$ continetur in $6a^3b$? Reſp. $3ab$ Quare ſcribe $3ab$ in Quoto & ablato facto $3ab$ in $\overline{2aa + 3ab}$ ſeu $6a^3b + 9aabb$ reſtabit etiamnum $-4aabb - 12ab^3 + 4b^4$ pro opere pro-

$$
\begin{array}{l}
a^4 + 6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4 \,(aa + 3a - b2bb \\
a^4 \\
\overline{} \\
0 \\
\quad 6a^3b + 9aabb \\
\quad \overline{} \\
\quad 0 \quad -4aabb \\
\qquad\quad -4aabb - 12ab^3 + 4b^4 \\
\qquad\quad \overline{} \\
\qquad\qquad 0 \qquad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

ſequendo.

ſequendo. Adeoque dic iterum quoties duplum Quoti, nempe $2aa + 6ab$ continetur in $-4aabb - 12ab^3$, ſive quod perinde eſt dic quoties duplum primi termini Quoti ſeu $2aa$ continetur in primo reſidui termino $-4aabb$? Reſp. $-2bb$. Et proinde ſcripto $-2bb$ in Quoto, & ablato facto $-2bb$ in $2aa + 6ab - 2bb$ ſeu $-4aabb - 12ab^3 + 4b^4$, reſtabit nihil. Unde conſtat radicem eſſe $aa + 3ab - 2bb$.

Atque ita quantitatis $xx - ax + \frac{1}{4}aa$ radix eſt $x - \frac{1}{2}a$, & quantitatis $y^4 + 4y^3 - 8y + 4$ radix $yy + 2y - 2$, & quantitatis $16a^4 - 24aaxx + 9x^4 + 12bbxx - 16aabb + 4b^4$ radix $3xx - 4aa + 2bb$ ut è ſubjectis diagrammis conſtare poteſt.

$$xx - ax + \tfrac{1}{4}aa \;(x - \tfrac{1}{2}a,$$

$$\begin{array}{lll}
xx & & \\
\hline
0 & & \\
 & -ax & +\tfrac{1}{4}aa \\
\hline
 & 0 & 0
\end{array}$$

$$9x^4 \begin{matrix} -24aa \\ +12bb \end{matrix} xx \begin{matrix} +16a^4 \\ -16aabb \\ +4b^4 \end{matrix} \;\left(3xx \begin{matrix} -4aa \\ +2bb \end{matrix}\right.$$

$$\begin{array}{lll}
9x^4 & & \\
\hline
0 & & \\
 & \begin{matrix} -24aa \\ +12bb \end{matrix} xx & \begin{matrix} +16a^4 \\ -16aabb \\ +4b^4 \end{matrix} \\
\hline
 & 0 & 0
\end{array}$$

$$y^4 + 4y^3 * - 8y + 4 \; (yy + 2y - 2$$
$$\underline{y^4}$$
$$0$$
$$\underline{4y^3 + 4yy}$$
$$0 - 4yy$$
$$\underline{-4yy - 8y + 4}$$
$$0 \quad 0 \quad 0$$

Si radicem cubicam ex $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ oportet extrahere, operatio est hujusmodi. Extrahe

$$a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \; (a + b.$$
$$\underline{a^3}$$
$$3aa) \; 0 + 3aab \; (b$$
$$\overline{a^3 + 3aab + 3abb + b^3}$$
$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

radicem cubicam primi termini a^3 nempe a, & pone in Quoto. Tum ablato ejus cubo a^3; dic quoties triplum quadratum ejus seu $3aa$ continetur in proximo residui termino $3aab$? & prodit b. Quare scribe etiam b in Quoto, & cubo Quoti $a + b$ ablato restabit nihil. Radix itaque est $a + b$.

Eodem modo radix cubica, si extrahatur ex $z^6 + 6z^5 - 40z^3 + 96z - 64$, prodit $zz + 2z - 4$. Atque ita in altioribus radicibus.

De

De REDUCTIONE FRACTIONUM *&* RADICALIUM.

PRæcedentibus operationibus inſervit reductio fractarum & radicalium quantitatum, idque vel ad minimos terminos vel ad eandem denominationem.

De REDUCTIONE FRACTIONUM *ad minimos terminos.*

FRactiones ad minimos terminos reducuntur dividendo numeratores ac denominatores per maximum communem diviſorem. Sic fractio $\frac{aac}{bc}$ reducitur ad ſimpliciorem $\frac{aa}{b}$ dividendo utrumque aac & bc per c; & $\frac{203}{667}$ reducitur ad ſimpliciorem $\frac{7}{23}$ dividendo utrumque 203 & 667 per 29; & $\frac{203aac}{667bc}$ reducitur ad $\frac{7aa}{23b}$ dividendo per $29c$. Atque ita $\frac{6a^3-9acc}{6aa+3ac}$ evadit $\frac{2aa-3cc}{2a+c}$ dividendo per $3a$. Et $\frac{a^3-aab+abb-b^3}{aa-ab}$ evadit $\frac{aa+bb}{a}$ dividendo per $a-b$.

Et hac Methodo termini poſt Multiplicationem vel Diviſionem plerumque abbreviari poſſunt. Quemadmodum ſi multiplicare oportet $\frac{2ab^3}{3ccd}$ per

$\frac{9acc}{bdd}$ vel id dividere per $\frac{bdd}{9acc}$ prodibit $\frac{18aab^3cc}{3bccd^3}$, & per reductionem $\frac{6aabb}{d^3}$. Sed in hujusmodi casibus præstat ante operationem concinnare terminos, dividendo per maximum communem divisorem quos postea dividere oporteret. Sic in allato exemplo si dividam $2ab^3$ & bdd per communem divisorem b, & $3ccd$ ac $9acc$ per communem divisorem $3cc$; emerget fractio $\frac{2abb}{d}$ multiplicanda per $\frac{3a}{dd}$ vel dividenda per $\frac{dd}{3a}$ prodeunte tandem $\frac{6aabb}{d^3}$ ut supra. Atque ita $\frac{aa}{c}$, in $\frac{c}{b}$ evadit $\frac{aa}{1}$ in $\frac{1}{b}$ seu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{aa}{c}$ divis. per $\frac{b}{c}$ evadit aa divis. per b seu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{a^3 - axx}{xx}$ in $\frac{cx}{aa + ax}$ evadit $\frac{a - x}{x}$ in $\frac{c}{1}$ seu $\frac{ac}{x} - c$. Et 28 divis. per $\frac{7}{3}$ evadit 4 divis. per $\frac{1}{3}$, seu 12.

De inventione Divisorum.

HUC spectat inventio divisorum per quos quantitas aliqua dividi possit. *Si quantitas simplex est divide eam per minimum ejus divisorem, & quotum per minimum divisorem ejus, donec quotus restet indivisibilis, & omnes quantitatis divisores primos habebis. Dein horum divisorum singulos binos, ternos, quaternos,* &c. *duc in se, & habebis etiam omnes divisores compositos.* Ut si numeri 60 divisores omnes desiderentur, divide eum per 2, & quotum 30 per 2,

&

& quotum 15 per 3 & reſtabit quotus indiviſibilis 5. Ergo diviſores primi ſunt 1,2,2,3,5 : Ex binis compoſiti 4,6,10,15 : Ex ternis 12,20,30, ex omnibus 60. Rurſus ſi quantitatis $21abb$ diviſores omnes deſiderentur, divide eam per 3, & quotum $7abb$ per 7, & quotum abb per a, & quotum bb per b, & reſtabit quotus primus b. Ergo diviſores primi ſunt 1,3,7, a, b, b; ex binis compoſiti 21 $3a$, $3b$, $7a$, $7b$, ab, bb; ex ternis $21a$, $21b$, $3ab$, $3bb$, $7ab$, $7bb$, abb; ex quaternis $21ab$, $21bb$, $3abb$, $7abb$; ex quinis $21abb$. Eodem modo ipſius $2abb - 6aac$ diviſores omnes ſunt 1, 2, a, $bb - 3ac$, $2a$, $2bb - 6ac$, $abb - 3aac$, $2abb - 6aac$.

Si quantitas poſtquam diviſa eſt per omnes ſimplices diviſores manet compoſita & ſuſpicio eſt eam compoſitum aliquem diviſorem habere, diſpone eam ſecundum dimenſiones literæ alicujus quæ in ea eſt, & pro litera illa ſubſtitue ſigillatim tres vel plures terminos hujus progreſſionis Arithmeticæ, 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, *ac terminos totidem reſultantes una cum omnibus eorum diviſoribus ſtatue è regione correſpondentium terminorum progreſſionis, poſitis diviſorum ſignis tam affirmativis quam negativis. Dein è regione etiam ſtatue progreſſiones arithmeticas quæ per omnium numerorum diviſores percurrunt pergentes à majoribus terminis ad minores eodem ordine quo termini progreſſionis* 3, 2, 1, 0, — 1, — 2 *pergunt, & quarum termini differunt vel unitate vel numero aliquo qui dividit altiſſimum terminum propoſitæ quantitatis. Siqua occurrit ejuſmodi progreſſio, iſte terminus ejus qui ſtat è regione termini* 0 *progreſſionis primæ, diviſus per differentiam terminorum, & cum ſigno ſuo annexus literæ præfatæ, componet quantitatem per quam diviſio tentanda eſt.*

Ut ſi quantitas ſit $x^3 - xx - 10x + 6$ pro x ſubſtituendo ſigillatim terminos progreſſionis 1, 0, — 1, orientur numeri — 4, 6, + 14 quos cum omnibus eorum diviſoribus colloco è regione terminorum progreſſionis 1, 0, — 1 hoc modo. Dein

Dein quoniam altissimus terminus x^3 per nullum numerum præter unitatem divisibilis est, quæro in divisoribus progressionem cujus termini differunt unitate, & a superioribus ad inferiora pergendo decrescunt perinde ac termini progressionis lateralis 1, 0, — 1. Et hujusmodi progressionem unicam tantum invenio nempe 4, 3, 2, cujus itaque terminum + 3 seligo qui stat è regione termini 0 progressionis primæ 1, 0, — 1, tentoque divisionem per $x + 3$. Et res succedit, prodeunte $xx - 4x + 2$.

1	4	1.2.4.	+ 4.
0	6	1.2.3.6	+ 3.
— 1	14	1.2.7.14	+ 2.

Rursus si quantitas sit $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$. pro y substituo sigillatim 2, 1, 0, — 1, — 2 & numeros resultantes 30, 7, 20, 3, 34 cum omnibus eorum divisoribus è regione colloco ut sequitur. Et in divisoribus hanc solam esse animadverto decrescentem progressionem arithmeticam + 10, + 7, + 4, + 1, — 2. Hujus terminorum differentia 3 dividit altissimum quantitatis terminum $6y^4$. Quare terminum + 4 qui stat è regione termini 0, divisum per differentiam terminorum 3 adjungo literæ y, tentoque divisionem per $y + \frac{4}{3}$ vel quod perinde est per $3y + 4$, & res succedit prodeunte $2y^3 - 3yy - 3y + 5$.

2	30	1.2.3.5.6.10.15.30	+ 10.
1	7	1.7	+ 7.
0	20	1.2.4.5.10.20	+ 4.
— 1	3	1.3	+ 1.
— 2	34	1.2.17.34	— 2.

Atque ita si quantitas sit $24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140aa + 64a + 30$; operatio erit ut sequitur.

2	42	1.2.3.6.7.14.21.42.	+ 3. + 3. + 7.
1	23	1.23.	+ 1. — 1. + 1.
0	30	1.2.3.5.6.10.15.30.	— 1. — 5. — 5.
— 1	297	1.3.9.11.27.33.99.297.	— 3. — 9. — 17.

Tres

Tres occurrunt hic progreſſiones quarum termini $-1.-5.-5$ diviſi per differentias terminorum 2, 4, 6, dant tres diviſores tentandos $a-\frac{1}{2}$, $a-\frac{5}{4}$ & $a-\frac{5}{6}$. Et diviſio per ultimum diviſorem $a-\frac{5}{6}$ ſeu $6a-5$ ſuccedit prodeunte $4a^4-5a^3+4aa-20a-6$.

Si nullus occurrit hac methodo diviſor, vel nullus qui dividit propoſitam quantitatem concludendum erit quantitatem illam non admittere diviſorem unius dimenſionis. Poteſt tamen fortaſſe, ſi plurium ſit quam trium dimenſionum, diviſorem admittere duarum. Et ſi ita, diviſor ille inveſtigabitur hac methodo. *In quantitate illa pro litera ſubſtitue, ut ante, quatuor vel plures terminos progreſſionis hujus* 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3. *Diviſores omnes numerorum reſultantium ſigillatim adde & ſubduc quadratis correſpondentium terminorum progreſſionis illius ductis in diviſorem aliquem numeralem altiſſimi termini quantitatis propoſitæ, & ſummas differentiaſque è regione progreſſionis colloca. Dein progreſſiones omnes collaterales nota quæ per iſtas ſummas differentiaſque percurrunt. Sit* $\pm C$ *terminus iſtiuſmodi progreſſionis qui ſtat è regione termini* 0 *progreſſionis primæ,* $\mp B$ *differentia quæ oritur ſubducendo* $\pm C$ *de termino proxime ſuperiori qui ſtat è regione termini* 1 *progreſſionis primæ,* A *prædictus termini altiſſimi diviſor numeralis, &* l *litera quæ in quantitate propoſita eſt, & erit* $All \pm Bl \pm C$ *diviſor tentandus.*

Ut ſi quantitas propoſita ſit $x^4-x^3-5xx+12x-6$, pro x ſcribo ſucceſſivè 3, 2, 1, 0, -1, -2, & prodeuntes numeros 39, 6, 1, -6, -21, -26, una cum eorum diviſoribus è regione diſpono, addoque & ſubduco diviſores terminis progreſſionis illius quadratis ductiſque in diviſorem numeralem termini x^4 qui unitas eſt, *viz.* terminis 9, 4, 1, 0, 1, 4, & ſummas differentiaſque è latere pariter diſpono. Dein progreſſiones quæ in iiſdem obveniunt è latere

tere etiam ſcribo, ut ſequitur. Harum progreſſionum terminos 2 & -3 qui ſtant è regione termini o progreſſionis illius quæ in columna prima

3	39	1.3.13.39.	9	−30.−4.6.8.10.12.22.48.	−4. 6.
2	6	1.2. 3. 6.	4	−2.1.2.3.5. 6. 7.10.	−2. 3.
1	1	1.	1	0. 2.	0. 0.
0	6	1.2. 3. 6.	0	−6.−3.−2.−1.1.2.3.6.	2.−3.
−1	21	1.3. 7.21.	1	−20.−6.−2.0.2.4. 8.22.	4.−6.
−2	26	1.2.13.26.	4	−22.−9.2.3.5.6.17.30.	6.−9.

eſt, uſurpo ſucceſſive pro $\mp C$, Differentias quæ oriuntur ſubducendo hos terminos de terminis ſuperioribus o & o nempe -2 & $+3$, uſurpo reſpectivè pro $\mp B$. Unitatem item pro A; & x pro l. Et ſic pro $All \pm Bl \pm C$ habeo diviſores duos tentandos $xx + 2x - 2$ & $xx - 3x + 3$, per quorum utrumque res ſuccedit.

Rurſus ſi proponatur quantitas $3y^5 - 6y^4 + y^3 - 8yy - 14y + 14$, Operatio erit ut ſequitur. Primo rem tento addendo & ſubducendo diviſores quadratis terminorum progreſſionis 2, 1, 0, 1 uſurpato 1 pro A, ſed res non ſuccedit. Quare pro A

3	170		27		−7. 17
2	38	1.2.19.38.	12	−26.−7.10.11.13.14.31.50.	−7. 11
1	10	1.2. 5.10.	3	−7.−2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	−7. 5
0	14	1.2. 7.14.	0	−14.−7.−2.−1. 1.2 7.14.	−7.−1
−1	10	1.2. 5.10.	3	−7.−2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	−7.−7
−2	190		12		−7.−13

uſurpo 3, alterum nempe termini altiſſimi $3y^5$ diviſorem numeralem, & quadratis iſtis multiplicatis per 3 hoc eſt numeris 12, 3, 0, 3 addo ſubducoque diviſores; & progreſſiones in terminis reſultantibus haſce duas invenio $-7, -7, -7, -7$ & 11.5 $-1, -7$. Expeditionis gratia neglexeram diviſores extimorum numerorum 170 & 190. Quare continuatis progreſſionibus ſumo proximos earum hinc inde terminos, *viz.* -7 & 17 ſuperius, & -7,

-7, & -13 inferius, ac tento si subductis his de numeris 27 ac 12 qui stant è regione in quarta columna differentiæ dividunt istos 170 & 190 qui stant è regione in columna secunda. Et quidem differentia inter 27 & -7 id est 34 dividit 170 & differentia 12 & -7 id est 19 dividit 190. Item differentia inter 27 & 17 id est 10 dividit 170 sed differentia inter 12 & -13 id est 25 non dividit 190. Quare posteriorem progressionem rejicio. Juxta priorem $\ddagger C$ est -7, & $\ddagger B$ nihil; terminis progressionis nullam habentibus differentiam. Quare divisor tentandus $All \ddagger Bl \ddagger C$, erit $3yy+7$. Et divisio succedit, prodeunte $y^3-2yy-2y+2$.

Si nullus inveniri potest hoc pacto divisor qui succedit, concludendum est quantitatem propositam non admittere divisorem duarum dimensionum. Posset eadem methodus extendi ad inventionem divisorum dimensionum plurium, quærendo in prædictis summis differentiisque progressiones non arithmeticas quidem sed alias quasdem quarum terminorum differentiæ primæ, secundæ, tertiæ, &c. sunt in arithmetica progressione: At in his Tyro non est detinendus.

Ubi in quantitate proposita duæ sunt literæ, & omnes ejus termini ad dimensiones æquè altas ascendunt; pro una istarum literarum pone unitatem, dein per regulas præcedentes quære divisorem, ac divisoris hujus comple deficientes dimensiones restituendo literam illam pro unitate.

Ut si quantitas sit $6y^4-cy^3-21ccyy+3c^3y+20c^4$ ubi termini omnes sunt quatuor dimensionum; pro c pono 1, quantitas evadit $6y^4-y^3-21yy+3y+20$, cujus divisor ut supra est $3y+4$, & completa deficiente dimensione posterioris termini per dimensionem c, fit $3y+4c$ divisor quæsitus. Ita si quantitas sit $x^4-bx^3-5bbxx+12b^3x-6b^4$; posito 1 pro b, & quantitatis resultantis $x^4-x^3-5xx+12x-6$ invento divisore

$xx+$

$xx + 2x - 2$, compleo ejus deficientes dimensiones per dimensiones b, & sic habeo divisorem quæsitum $xx + 2bx - 2bb$.

Ubi in quantitate proposita tres vel plures sunt literæ, & ejus termini omnes ad easdem dimensiones ascendunt; potest divisor per præcedentes regulas inveniri; sed expeditius hoc modo: *Quære omnes divisores terminorum omnium in quibus literarum aliqua non est, item terminorum omnium in quibus alia aliqua literarum non est, pariter & omnium in quibus tertia litera quartaque & quinta non est si tot sunt literæ. Et sic percurre omnes literas. Et è regione literarum colloca divisores respectivè. Dein vide si in serie aliqua divisorum per omnes literas pergente, partes omnes unicam tantum literam involventes tot vicibus reperiantur quot sunt literæ una dempta in quantitate proposita: Et partes duas literas involventes tot vicibus quot sunt literæ demptis duabus in eadem quantitate. Si ita est; partes istæ omnes sub signis suis semel sumptæ erunt divisor quæsitus.*

Ut si proponatur quantitas $12x^3 - 14bxx + 9cxx - 12bbx - 6bcx + 8ccx + 8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$; terminorum $8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$ in quibus non est x divisores unius dimensionis per præcedentes regulas inventi erunt $2b - 3c$ & $4b - 6c$; terminorum $12x^3 + 9cxx + 8ccx + 6c^3$ in quibus non est b, divisor unicus $4x + 3c$; ac terminorum $12x^3 - 14bxx - 12bbx + 8b^3$ in quibus non est c, divisores $2x - b$ & $4x - 2b$. Hos divisores è regione literarum x, b, c dispono ut hic vides. Cum

x	$2b - 3c.\ 4b - 6c.$
b	$4x + 3c.$
c	$2x - b.\ 4x - 2b.$

tres sint literæ & divisorum partes singulæ non nisi singulas literas involvant, in serie divisorum debent partes illæ bis reperiri. At divisorum $4b - 6c$ & $2x - b$ partes $4b$, $6c$, $2x$, b non nisi semel occurrunt. Extra divisorem illum cujus sunt partes non reperiuntur. Quare divisores illos negligo.

Restant

Reſtant tantum tres diviſores $2b - 3c$, $4x + 3c$ & $4x - 2b$. Hi in ſerie ſunt per omnes literas x, b, c pergente, & eorum partes ſingulæ $2b$, $3c$, $4x$, bis reperiuntur in ipſis ut oportuit, idque cum ſignis iiſdem, ſi modò ſigna diviſoris $2b - 3c$ mutentur, & ejus loco ſcribatur $-2b + 3c$. Nam ſigna diviſoris cujuſvis mutare licet. Sumo itaque horum partes omnes $2b$, $3c$, $4x$ ſemel ſub ſignis ſuis, & aggregatum $-2b + 3c + 4x$ diviſor erit quem invenire oportuit. Nam ſi per hunc dividas quantitatem propoſitam prodibit $3xx - 2bx + 2cc - 4bb$.

Rurſus ſi quantitas ſit $12x^5 - 10ax^4 - 9bx^4 - 26aax^3 + 12abx^3 + 6bbx^3 + 24a^3xx - 8aabxx - 8abbxx - 24b^3xx - 4a^3bx + 6aabbx - 12ab^3x + 18b^4x + 12a^4b + 32aab^3 - 12b^5$; diviſores terminorum in quibus x non eſt colloco è regione x; illos terminorum in quibus a non eſt, è regione a; & illos terminorum quibus b non eſt, è regione b, ut hic vides. Dein illos omnes qui ſunt unius

x	b, $2b$, $4b$, $aa + 3bb$, $2aa + 6bb$, $4aa + 12bb$, $bb - 3aa$, $2bb - 6aa$, $4bb - 12aa$.
a	$4xx - 3bx + 2bb$, $12xx - 9bx + 6bb$.
b	x, $2x$, $3x - 4a$, $6x - 8a$, $3xx - 4ax$, $6xx - 8ax$, $2xx + ax - 3aa$, $4xx + 2ax - 6aa$.

dimenſionis rejiciendos eſſe ſentio, quia ſimplices b, $2b$, $4b$, x, $2x$, & partes compoſitorum $3x - 4a$, $6x - 8a$, non niſi ſemel in omnibus diviſoribus reperiantur; tres autem ſunt literæ in quantitate propoſita, & partes illæ unicam tantum involvunt, atque adeo bis reperiri deberent. Similiter diviſores duarum dimenſionum $aa + 3bb$, $2aa + 6bb$, $4aa + 12bb$, $bb - 3aa$ & $4bb - 12aa$ rejicio, quia partes eorum aa, $2aa$, $4aa$, bb & $4bb$ unicam tantum literam a vel b involventes non niſi ſemel reperiuntur. Diviſoris autem $2bb - 6aa$,

qui ſolus reſtat è regione x, partes $2bb$ & $6aa$ quæ ſimiliter unicam tantum literam involvunt, iterum reperiuntur, nempe pars $2bb$ in diviſore $4xx - 3bx + 2bb$ & pars $6aa$ in diviſore $4xx + 2ax - 6aa$. Quin etiam hi tres diviſores in ſerie ſunt, ſtantes è regione trium literarum x, a, b; & omnes eorum partes $2bb$, $6aa$, $4xx$ quæ unicam tantum literam involvunt bis reperiuntur in ipſis, idque ſub propriis ſignis; partes vero $3bx$, $2ax$ quæ duas literas involvunt non niſi ſemel occurrunt in ipſis. Quare horum trium diviſorum partes omnes diverſæ $2bb$, $6aa$, $4xx$, $3bx$, $2ax$ ſub ſignis ſuis connexæ, diviſorem deſideratum $2bb - 6aa + 4xx - 3bx + 2ax$ conflabunt. Per hunc itaque divido quantitatem propoſitam & oritur $3x^3 - 4axx - 2aab - 6b^3$.

Si quantitatis alicujus termini omnes non ſunt æque alti, complendæ ſunt dimenſiones deficientes per dimenſiones literæ cujuſvis aſſumptæ, dein per præcedentes regulas invento diviſore, litera aſſumpta delenda eſt. Ut ſi quantitas ſit $12x^3 - 14bxx + 9xx - 12bbx - 6bx + 8x + 8b^3 - 12bb - 4b + 6$; aſſume literam quamvis c, & per dimenſiones ejus comple dimenſiones quantitatis propoſitæ ad hunc modum $12x^3 - 14bxx + 9cxx - 12bbx - 6bcx + 8ccx + 8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$. Dein hujus diviſore $4x - 2b + 3c$, invento dele c; & habebitur diviſor deſideratus $4x - 2b + 3$.

Aliquando diviſores facilius quam per has regulas inveniri poſſunt. Ut ſi litera aliqua in quantitate propoſita ſit unius tantum dimenſionis; quærendus erit maximus communis diviſor terminorum in quibus litera illa reperitur, & reliquorum terminorum in quibus non reperitur, nam diviſor ille totam dividet. Et ſi nullus eſt ejuſmodi communis diviſor, nullus erit diviſor totius. Exempli gratia, ſi proponatur quantitas $x^4 - 3ax^3$

$- 8aa$

$- 8aaxx + 18a^3x + cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c - 8a^4$; quæratur communis diviſor terminorum $+ cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c$ in quibus c unius eſt tantum dimenſionis, & terminorum reliquorum $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4$ ac diviſor ille nempe $xx + 2ax - 2aa$ dividet totam quantitatem.

Cæterum maximus duorum numerorum diviſor communis, ſi prima fronte non innoteſcit, invenitur perpetua ablatione minoris de majori & reliqui de ablato. Nam quæſitus erit diviſor qui tandem nihil relinquit. Sic ad inveniendum maximum communem diviſorem numerorum 203 & 667, aufer ter 203 de 667, & reliquum 58 ter de 203, & reliquum 29 bis de 58, reſtabitque nihil: Quod indicat 29 eſſe diviſorem quæſitum.

Haud ſecus in ſpeciebus communis diviſor; ubi compoſitus eſt, invenitur ſubducendo alterutram quantitatem, aut multiplicem ejus de altera: Si modò & quantitates illæ & reſiduum juxta literæ alicujus dimenſiones ut Diviſione oſtenſum eſt, ordinentur, & qualibet vice concinnentur dividendo ipſas per ſuos omnes diviſores qui aut ſimplices ſunt, aut ſingulos terminos inſtar ſimplicium dividunt. Sic ad inveniendum communem diviſorem Numeratoris ac Denominatoris fractionis hujus $\frac{x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4}{x^3 - axx - 8aax + 6a^3}$, multiplica Denominatorem per x ut primus ejus terminus evadat idem cum primo termino numeratoris. Dein aufer, & reſtabit $- 2ax^3 + 12a^3x - 8a^4$, quod concinnatum dividendo per $- 2a$ evadit $x^3 - 6aax + 4a^3$: Hoc aufer de Denominatore & reſtabit $- axx - 2aax + 2a^3$. Quod itidem per $- a$ diviſum fit $xx + 2ax - 2aa$. Hoc autem per x multiplica, ut ejus primus terminus evadat idem cum primo termino noviſſimi ablati $x^3 - 6aax + 4a^3$, de quo auferendum eſt; & re-

 ſtabit

stabit $-2axx-4aax+4a^3$, quod per $-2a$ divisum fit etiam $xx+2ax-2aa$. Et hoc cum idem sit ac superius residuum, proindeque ablatum relinquat nihil, quæsitus erit divisor per quem fractio proposita, factâ Numeratoris ac Denominatoris divisione, reduci potest ad simpliciorem, nempe ad $\frac{xx-5ax+4aa}{x-3a}$.

Atque ita si habeatur fractio

$$\frac{6a^5+15a^4b-4a^3cc-10aabcc}{9a^3b-27aabc-6abcc+18bc^3},$$

termini ejus imprimis abbreviandi sunt dividendo numeratorem per aa ac Denominatorem per $3b$. Dein ablato bis $3a^3-9aac-2acc+6c^3$ de $6a^3+15aab-4acc-10bcc$, restabit $\begin{matrix}+15b\\+18c\end{matrix}aa\begin{matrix}-10bcc\\-12c^3\end{matrix}$. Quod concinnatum dividendo terminum utrumque per $5b+6c$ perinde ac si $5b+6c$ simplex esset quantitas, evadit $3aa-2cc$. Hoc multiplicatum per a aufer de $3a^3-9aac-2acc+6c^3$ & secunda vice restabit $-9aac+6c^3$ quod itidem concinnatum per applicationem ad $-3c$, evadit etiam $3aa-2cc$ ut ante. Quare $3aa-2cc$ quæsitus est divisor. Quo invento, divide per eum partes fractionis propositæ & obtinebitur $\frac{2a^3+5aab}{3ab-9bc}$.

Quod si divisor communis hoc pacto non inveniatur, certum est nullum omninò existere, nisi forsan è terminis prodeat per quos Numerator ac Denominator fractionis abbreviantur. Ut si habeatur fractio $\frac{aadd-ccdd-aacc+c^4}{4aad-4acd-2acc+2c^3}$, ac termini ejus juxta dimensiones literæ d disponantur ita ut Numerator evadat $\begin{matrix}aa\\-cc\end{matrix}dd\begin{matrix}-aacc\\+c^4\end{matrix}$ ac Denominator

nator $\begin{matrix} 4aa \\ -4ac \end{matrix} d \begin{matrix} -2acc \\ +2c^3 \end{matrix}$. Hos imprimis oportet abbreviare dividendo utrumque Numeratoris terminum per $aa - cc$ & utrumque Denominatoris per $2a - 2c$ perinde ac si $aa - cc$ & $2a - 2c$ essent simplices quantitates. Atque ita vice Numeratoris emerget $dd - cc$, & vice Denominatoris $2ad - cc$, ex quibus sic præparatis nullus communis divisor obtineri potest. Sed è terminis $aa - cc$ & $2a - 2c$ per quos Numerator ac Denominator abbreviati sunt, prodit ejusmodi divisor, nempe $a - c$, cujus ope fractio ad hanc $\frac{add + cdd - acc - c^3}{4ad - 2cc}$ reduci potest. Quod si neque termini $aa - cc$ & $2a - 2c$ communem divisorem habuissent, fractio proposita fuisset irreducibilis.

Et hæc generalis est methodus inveniendi communes divisores: *Sed plerumque expeditius inveniuntur quærendo omnes alterutrius quantitatis divisores primos, hoc est, qui per alios dividi nequeunt, ac dein tentando siqui alteram divident absque residuo.* Sic ad reducendum $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ ad minimos terminos, inveniendi sunt divisores quantitatis $aa - ab$ nempe a & $a - b$. Dein tentandum est an alterute a vel $a - b$ dividet etiam $a^3 - aab + abb - b$ absque residuo.

De REDUCTIONE FRACTIONUM *ad communem Denominatorem.*

Fractiones ad communem Denominatorem reducuntur multiplicando terminos utriusque per denominatorem alterius.

Sic habitis $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, duc terminos unius $\frac{a}{b}$ in d, & vicissim terminos alterius $\frac{c}{d}$ in b, & evadent $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, quarum communis est denominator bd. Atque ita a & $\frac{ab}{c}$ sive $\frac{a}{1}$ & $\frac{ab}{c}$ evadunt $\frac{ac}{c}$ & $\frac{ab}{c}$. Ubi verò Denominatores communem habent divisorem, sufficit multiplicare alternè per Quotientes. Sic fractiones $\frac{a^3}{bc}$ & $\frac{a^3}{bd}$ ad hasce $\frac{a^3d}{bcd}$ & $\frac{a^3c}{bcd}$ reducuntur, multiplicando alternè per Quotientes c ac d ortos divisione denominatorum per communem divisorem b.

Hæc autem reductio præcipuè usui est in Additione & Subductione fractionum, quæ si diversos habent denominatores, ad eundem reducendæ sunt antequam uniri possunt. Sic $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ per reductionem evadit $\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$, sive $\frac{ad+bc}{bd}$. Et $a + \frac{ab}{c}$ evadit $\frac{ac+ab}{c}$. Et $\frac{a^3}{bc} - \frac{a^3}{bd}$ evadit $\frac{a^3d - a^3c}{bcd}$ vel

$\frac{d-c}{bcd}a^3$. Et $\frac{c^4+x^4}{cc-xx}-cc-xx$ evadit $\frac{2x^4}{cc-xx}$. Atque ita $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}$ evadit $\frac{14}{21}+\frac{15}{21}$ five $\frac{14+15}{21}$ hoc eſt $\frac{29}{21}$. Et $\frac{11}{6}-\frac{3}{4}$ evadit $\frac{22}{12}-\frac{9}{12}$ five $\frac{13}{12}$. Et $\frac{3}{4}-\frac{5}{12}$ evadit $\frac{9}{12}-\frac{5}{12}$ five $\frac{4}{12}$ hoc eſt $\frac{1}{3}$. Et $3\frac{4}{7}$ five $\frac{3}{1}+\frac{4}{7}$ evadit $\frac{21}{7}+\frac{4}{7}$ five $\frac{25}{7}$. Et $25\frac{1}{2}$ evadit $\frac{51}{2}$.

Fractiones ubi plures ſunt gradatim uniri debent. Sic habito $\frac{aa}{x}-a+\frac{2xx}{3a}-\frac{ax}{a-x}$; ab $\frac{aa}{x}$ aufer a & reſtabit $\frac{aa-ax}{x}$, huic adde $\frac{2xx}{3a}$ & prodibit $\frac{3a^3-3aax+2x^3}{3ax}$ unde aufer denique $\frac{ax}{a-x}$ & reſtabit $\frac{3a^4-6a^3x+2ax^3-2x^4}{3aax-3axx}$. Atque ita ſi habeatur $3\frac{4}{7}-\frac{2}{3}$, imprimis aggregatum $3\frac{4}{7}$ inveniendum eſt nempe $\frac{25}{7}$ dein ab hoc auferendum $\frac{2}{3}$ & reſtabit $\frac{61}{21}$.

De REDUCTIONE RADICALIUM *ad minimos terminos.*

Radicalis ubi totius radix extrahi nequit, plerumque concinnatur extrahendo radicem diviſoris alicujus. Sic $\sqrt{aabc}$ extrahendo radicem diviſoris aa fit $a\sqrt{bc}$. Et $\sqrt{48}$ extrahendo radicem diviſoris 16 fit $4\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48aabc}$ extrahendo radicem diviſoris $16aa$ fit $4a\sqrt{3bc}$. Et $\sqrt{\frac{a^3b-4aabb+4ab^3}{cc}}$ extrahendo radicem diviſoris $\frac{aa-4abb+4bb}{cc}$

 fit

fit $\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$ extrahendo radicem divisoris $\frac{aamm}{ppzz}$ fit $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$. Et $6\sqrt{\frac{75}{98}}$ extrahendo radicem divisoris $\frac{25}{49}$ fit $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}$, sive $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{6}{4}}$ radicem que denominatoris adhuc extrahendo, fit $\frac{15}{7}\sqrt{6}$. Et sic $a\sqrt{\frac{b}{a}}$ sive $a\sqrt{\frac{ab}{aa}}$ extrahendo radicem denominatoris fit $\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{3}:\overline{8a^3b+16a^4}$ extrahendo radicem cubicam divisoris $8a^3$ fit $2a\sqrt{3}:\overline{b+2a}$. Haud secus $\sqrt{4}\,a^3x$ extrahendo radicem quadraticam divisoris aa fit $\sqrt{a}$ in $\sqrt{4}\,ax$ vel extrahendo radicem quadrato-quadraticam divisoris a^4 fit $a\sqrt{4}\,\frac{x}{a}$. Atque ita $\sqrt{6}:a^7x^5$ convertitur in $a\sqrt{6}:ax^5$, vel in $ax\sqrt{6}:\frac{a}{x}$ vel in $\sqrt{ax}\times\sqrt{3}:aax$.

Cæterùm hæc reductio non tantùm concinnandis radicalibus inservit, sed & earum Additioni & Subductioni, si modò ex parte radicali conveniant ubi ad formam simplicissimam reducuntur. Tunc enim uniri possunt, quod aliter non fit. Sic $\sqrt{48}+\sqrt{75}$ per reductionem evadit $4\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ hoc est $9\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48}-\sqrt{\frac{16}{27}}$ per reductionem evadit $4\sqrt{3}-\frac{4}{9}\sqrt{3}$ hoc est $\frac{32}{9}\sqrt{3}$. Et sic $\sqrt{\frac{4ab^3}{cc}}+\sqrt{\frac{a^3b-4aabb+4ab^3}{cc}}$ extrahendo quicquid est rationale, evadit $\frac{2b}{c}\sqrt{ab}+\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$ hoc est $\frac{a}{c}\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{3}:\overline{8a^3b+16a^4}-\sqrt{3}:\overline{b^4+2ab^3}$ evadit $2a\sqrt{3}:\overline{b+2a}-b\sqrt{3}:\overline{b+2a}$ hoc est $\overline{2a-b}\sqrt{3}:\overline{b+2a}$.

De

De REDUCTIONE RADICALIUM *ad eandem denominationem.*

CUM in radicalibus diversæ denominationis instituenda est multiplicatio vel divisio, oportet omnes ad eandem denominationem reducere, idque præfigendo signum radicale cujus index est minimus numerus quem earum indices dividunt absque residuo, & suffixas quantitates toties dempta una vice in se ducendo quoties index ille jam major evaserit.

Sic enim $\sqrt{ax}$ in $\sqrt{3}:aax$ evadit $\sqrt{6}:a^3x^3$ in $\sqrt{6}:a^4xx$ hoc est $\sqrt{6}:a^7x^5$. Et $\sqrt{a}$ in $\sqrt{4}:ax$ evadit $\sqrt{4}:aa$ in $\sqrt{4}:ax$ hoc est $\sqrt{4}:a^3x$. Et $\sqrt{6}$ in $\sqrt{4}:\frac{5}{6}$ evadit $\sqrt{4}:36$ in $\sqrt{4}:\frac{5}{6}$ hoc est $\sqrt{4}:30$. Eadem ratione $a\sqrt{bc}$ evadit $\sqrt{aa}$ in $\sqrt{bc}$ hoc est $\sqrt{aabc}$. Et $4a\sqrt{3bc}$ evadit $\sqrt{16aa}$ in $\sqrt{3bc}$ hoc est $\sqrt{48aabc}$. Et $2a\sqrt{3}:\overline{b+2a}$ evadit $\sqrt{3}:8a^3$ in $\sqrt{3}:\overline{b+2a}$ hoc est $\sqrt{3}:\overline{8a^3b+16a^4}$. Atque ita $\frac{\sqrt{ac}}{b}$ fit $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bb}}$ sive $\sqrt{\frac{ac}{bb}}$. Et $\frac{6abb}{\sqrt{18ab^3}}$ fit $\frac{\sqrt{36aab^4}}{\sqrt{18ab^3}}$ sive $\sqrt{2ab}$. Et sic in aliis.

De REDUCTIONE RADICALIUM *ad simpliciores radicales per extractionem radicum.*

RAdices quantitatum quæ ex integris & radicalibus quadraticis componuntur sic extrahe. *Designet* A *quantitatis alicujus partem majorem,* B *partem minorem; Et erit* $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}$ *quadratum*

majo-

majoris partis radicis; & $\frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2}$ *quadratum partis minoris, quæ quidem majori adnectenda est cum signo ipsius* B.

Ut si quantitas sit $3 + \sqrt{8}$, scribendo 3 pro A, & $\sqrt{8}$ pro B, erit $\sqrt{AA - BB} = 1$, indeque quadratum majoris partis radicis $\frac{3 + 1}{2}$ id est 2, & quadratum minoris partis $\frac{3 - 1}{2}$ id est 1. Ergo radix est $1 + \sqrt{2}$. Rursus si ex $\sqrt{32} - \sqrt{24}$ radix extrahenda sit, ponendo $\sqrt{32}$ pro A & $\sqrt{24}$ pro B erit $\sqrt{AA - BB} = \sqrt{8}$, & inde $\frac{\sqrt{32} + \sqrt{8}}{2}$ & $\frac{\sqrt{32} - \sqrt{8}}{2}$ hoc est $3\sqrt{2}$ & $\sqrt{2}$ quadrata partium radicis. Radix itaque est $\sqrt[4]{18} - \sqrt[4]{2}$. Eodem modo si de $aa + 2x\sqrt{aa - xx}$ radix extrahi debet, pro A scribe aa, & pro B $2x\sqrt{aa - xx}$ & erit $AA - BB = a^4 - 4aaxx + 4x^4$. Cujus radix est $aa - 2xx$. Unde quadratum unius partis radicis erit $aa - xx$, illud alterius xx; adeoque radix $x + \sqrt{aa - xx}$. Rursus si habeatur $aa + 5ax - 2a\sqrt{ax + 4xx}$, scribendo $aa + 5ax$ pro A & $2a\sqrt{ax + 4xx}$ pro B, fiet $AA - BB = a^4 + 6a^3x + 9aaxx$ cujus radix est $aa + 3ax$. Unde quadratum majoris partis radicis erit $aa + 4ax$, illud minoris ax, & radix $\sqrt{aa + 4ax} - \sqrt{ax}$. Denique si habeatur $6 + \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{24}$, ponendo $6 + \sqrt{8} = A$ & $-\sqrt{12} - \sqrt{24} = B$ fiet $AA - BB = 8$. Unde radicis pars major $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$ hoc est (ut supra) $1 + \sqrt{2}$, & pars minor $\sqrt{3}$, atque adeo radix ipsa $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Cæterum ubi

plures

plures sunt hujusmodi termini radicales, possunt partes radicis citius inveniri dividendo factum quarumvis duarum radicalium per tertiam aliquam radicalem quæ producit quotum rationalem & integrum. Nam Quoti istius radix erit duplum partis radicis quæsitæ. Ut in exemplo novissimo $\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{12}}{\sqrt{24}} = 2$, $\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{24}}{\sqrt{12}} = 4$, $\frac{\sqrt{12} \times \sqrt{24}}{\sqrt{8}} = 6$. Ergo partes radicis sunt 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ut supra.

Est & regula extrahendi altiores radices ex quantitatibus numeralibus duarum potentia commensurabilium partium.

Sit quantitas $A \pm B$. *Ejus pars major* A. *Index radicis extrahendæ c. Quære minimum numerum n, cujus potestas* n^c *dividitur per* $AA - BB$ *sine residuo, & sit quotus* Q. *Computa* $\sqrt[c]{\overline{A + B} \times \sqrt{Q}}$ *in numeris integris proximis. Sit illud r. Divide* $A\sqrt{Q}$ *per maximum divisorem rationalem: Sit quotus s, sitque* $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ *in numeris integris proximis t. Et erit* $\frac{ts \pm \sqrt{ttss - n}}{\sqrt[2c]{Q}}$ *radix quæsita, si modo radix extrahi potest.*

Ut si radix cubica extrahenda sit ex $\sqrt{968} + 25$; erit $AA - BB = 343$; ejus divisores 7, 7, 7; ergo $n = 7$ & $Q = 1$. Porro $\overline{A + B} \times \sqrt{Q}$ seu $\sqrt{968} + 25$ extracta prioris partis radice fit paulo major quam 56; ejus radix cubica in numeris proximis est 4. Ergo $r = 4$. Insuper $A\sqrt{Q}$ seu $\sqrt{968}$ extrahendo quicquid rationale est fit $22\sqrt{2}$. Ergo $\sqrt{2}$ ejus pars radicalis est s, & $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ seu $\frac{5}{2\sqrt{2}}$ in numeris integris proximis est 2. Ergo $t = 2$.

Denique

Denique ts eſt $2\sqrt{2}$, $\sqrt{ttss+n}$ eſt 1 & $\sqrt[2c]{Q}$ ſeu $\sqrt[5]{1}$ eſt 1. Ergo $2\sqrt{2}+1$ eſt radix quæſita ſi modo radix extrahi queat. Tento itaque per multiplicationem ſi cubus ipſius $2\sqrt{2}+1$ ſit $\sqrt{968}+25$ & res ſuccedit.

Rurſus ſi radix cubica extrahenda ſit ex $68-\sqrt{4374}$; erit $AA-BB=250$, Cujus diviſores ſunt 5, 5, 5, 2. Ergo $n=5\times 2=10$, & $Q=4$. Et $\sqrt[c]{A+B\times\sqrt{Q}}$ ſeu $\sqrt[3]{68+\sqrt{4374}\times 2}$ in numeris proximis integris eſt $7=r$. Inſuper $A\sqrt{Q}$ ſeu $68\sqrt{4}$ extrahendo quicquid rationale eſt fit $136\sqrt{1}$. Ergo $s=1$, & $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ ſeu $\frac{7+\frac{10}{7}}{2}$ in numeris integris proximis eſt $4=t$: Ergo $ts=4$, $\sqrt{ttss-n}=\sqrt{6}$ & $\sqrt[2c]{Q}=\sqrt[6]{4}$ ſeu $\sqrt[3]{2}$ atque adeo radix tentanda $\frac{4-\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Iterum ſi radix quadrato-cubica extrahenda ſit ex $29\sqrt{6}+41\sqrt{3}$; erit $AA-BB=3$, adeoque $n=3$, $Q=81$, $r=5$, $s=\sqrt{6}$, $t=1$, $ts=\sqrt{6}$, $\sqrt{ttss-n}=\sqrt{3}$ & $\sqrt[2c]{Q}=\sqrt[10]{81}$ ſeu $\sqrt[5]{9}$ atque adeo radix tentanda $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$.

Cæterum in hujuſmodi operationibus ſi quantitas fractio ſit vel partes ejus communem habent diviſorem; radices denominatoris & factorum ſeorſim extrahe. Ut ſi ex $\sqrt{242}-12\frac{1}{2}$ radix cubica extrahenda ſit; hoc, reductis partibus ad communem denominatorem, fiet $\frac{\sqrt{968}-25}{2}$. Dein

extracta

extracta seorsim numeratoris ac denominatoris radice cubica orietur $\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt[3]{2}}$. Rursus si ex $\sqrt[3]{3993}$ $+ \sqrt[6]{17578125}$ radix aliqua extrahenda sit; divide partes per communem divisorem $\sqrt[3]{3}$, & emerget $11 + \sqrt{125}$. Unde quantitas proposita valet $\sqrt[3]{3}$ in $\overline{11 + \sqrt{125}}$, cujus radix invenietur extrahendo seorsim radicem factoris utriusque $\sqrt[3]{3}$ & $11 + \sqrt{125}$.

De forma ÆQUATIONIS.

ÆQUATIONES, quæ sunt quantitatum aut sibi mutuo æqualium, aut simul nihilo æquipollentium congeries, duobus præcipuè modis considerandæ veniunt; vel ut ultimæ conclusiones ad quas in Problematis solvendis deventum est, vel ut media quorum ope finales æquationes acquirendæ sunt. Prioris generis æquatio ex unica tantum incognita quantitate cognitis involuta conflatur, modò Problema sit definitum & aliquid certi quærendum innuat. Sed eæ posterioris generis involvunt plures quantitates incognitas quæ ideo debent inter se comparari & ita connecti ut ex omnibus una tandem emergat æquatio nova cui inest unica quam quærimus incognita quantitas admista cognitis. Quæ quantitas ut exinde facilius eliciatur, æquatio ista variis plerumque modis transformanda est, donec evadat ea simplicissima quæ potest, atque etiam similis alicui ex sequentibus earum gradibus, in quibus x designat quantitatem quæsitam ad cujus dimensiones termini, ut vides, ordinantur, & p, q, r, s alias quascunque quantitates ex

quibus determinatis & cognitis etiam x determinatur, & per methodos explicandas investigari potest.

$$x=p. \qquad x-p=0.$$
$$xx=px+q. \qquad \text{Vel } xx-px-q=0.$$
$$x^3=pxx+qx+r. \qquad x^3-pxx-qx-r=0.$$
$$x^4=px^3+qxx+rx+s. \qquad x^4-px^3-qxx-rx-s=0.$$
&c. &c.

Ad horum normam itaque termini æquationum secundum dimensiones incognitæ quantitatis in ordinem semper redigendi sunt, ita ut primum locum occupent in quibus incognita quantitas est plurimarum dimensionum, instar x, xx, x^3, x^4, & secundum locum in quibus ea est una dimensione minor, instar p, px, pxx, px^3, & sic præterea. Et quod signa terminorum attinet, possunt ea omnibus modis se habere: Imò & unus vel plures ex intermediis terminis aliquando deesse. Sic $x^3 * -bbx+b^3=0$ vel $x^3=bbx-b^3$, est æquatio tertii gradus, $Z^4 \begin{smallmatrix}+a\\-b\end{smallmatrix} Z^3 * \begin{smallmatrix}+ab^3\\-b^4\end{smallmatrix} = 0$ æquatio quarti. Nam gradus æquationum æstimantur ex maxima dimensione quantitatis incognitæ, nullo respectu ad quantitates cognitas habito, nec ad intermedios terminos. Attamen ex defectu intermediorum terminorum æquatio plerumque fit multò simplicior, & nonnunquam ad gradum inferiorem quodammodo deprimitur. Sic enim $x^4=qxx+s$ æquatio secundi gradus censenda est, siquidem ea in duas secundi gradus æquationes resolvi potest. Nam supposito $xx=y$, & y pro xx in æquatione illa perinde scripto, ejus vice prodibit $yy=qy+s$, æquatio secundi gradus; cujus ope cum y inventa fuerit, æquatio $xx=y$ secundi etiam gradus, dabit x.

Atque

Atque hæ ſunt concluſiones ad quas Problemata deduci debent. Sed antequam eorum reſolutionem aggrediar, opus erit ut modos transformandi & in ordinem redigendi æquationes, & ex mediis eliciendi finales æquationes abſtracte doceam. Æquationis autem ſolitariæ reductionem in ſequentibus regulis complectar.

De concinnanda Æquatione ſolitaria.

REG. I. *SIquæ ſunt quantitates quæ ſe mutuo deſtruere, vel per Additionem aut Subductionem coaleſcere poſſunt, termini perinde minuendi ſunt.*

Veluti ſi habeatur $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$ aufer utrinque $2x$ & adde $3a$ proditque $5b = 8a + x$. Atque ita $\frac{2ab + bx}{a} - b = a + b$, delendo æquipollentes $\frac{2ab}{a} - b = b$, evadit $\frac{bx}{a} = a$.

Ad hanc Regulam referri debet etiam ordinatio terminorum æquationis quæ fieri ſolet per tranſlationem ad contrarias partes cum ſigno contrario. Ut ſi habita æquatione $5b = 8a + x$ deſideretur x; aufer utrinque $8a$, vel, quod eodem recidit, transfer $8a$ ad contrarias partes cum ſigno mutato, & prodibit $5b - 8a = x$. Eodem modo ſi habeatur $aa - 3ay = ab - bb + by$ ac deſideretur y, transpone $-3ay$ & $ab - bb$, eo ut ex una parte conſiſtant termini multiplicati per y, & ex altera reliqui termini, & prodibit $aa - ab + bb = 3ay + by$, unde y elicietur per Reg. 5. ſequentem, dividendo ſcilicet utramque partem per $3a + b$, prodibit enim $\frac{aa - ab + bb}{3a + b} = y$. Atque ita æquatio

$abx + a^3 - aax = abb - 2abx - x^3$ per debitam transpositionem & ordinationem evadit $x^3 = \begin{matrix} aa \\ -3ab \end{matrix} x \begin{matrix} -a^3 \\ +abb \end{matrix}$ vel $x^3 \begin{matrix} -aa \\ +3ab \end{matrix} x \begin{matrix} +a^3 \\ -abb \end{matrix} = 0.$

Reg. II. *Siqua compareat quantitas per quam omnes æquationis termini multiplicantur, debent omnes per illam quantitatem dividi; vel si per eandem quantitatem omnes dividantur debent omnes per illam multiplicari.*

Sic habito $15bb = 24ab + 3bx$, divide terminos omnes per b & fit $15b = 24a + 3x$. Deinde per 3 & fit $5b = 8a + x$. Vel habito $\frac{b^3}{ac} - \frac{bbx}{cc} = \frac{xx}{c}$ multiplica omnes per c & prodit $\frac{b^3}{a} - \frac{bbx}{c} = xx.$

Reg. III. *Siqua sit fractio irreducibilis in cujus denominatore reperiatur litera illa ad cujus dimensiones æquatio ordinanda est, omnes æquationis termini per istum denominatorem, aut per aliquem divisorem ejus multiplicandi sunt.*

Ut si æquatio $\frac{ax}{a-x} + b = x$ secundum x ordinanda sit, multiplicentur omnes ejus termini per $a - x$ denominatorem fractionis $\frac{ax}{a-x}$ siquidem x inibi reperiatur, & prodit $ax + ab - bx = ax - xx$, seu $ab - bx = -xx$, & facta utriusque partis translatione $xx = bx - ab$. Atque ita si habeatur $\frac{a^3 - abb}{2cy - cc} = y - c$ terminique juxta y ordinandi sint multiplicentur per denominatorem $2cy - cc$ vel saltem per divisorem $2y - c$ quo y tollatur è denominatore & exurget $\frac{a^3 - abb}{c}$

$= 2yy$

$= 2yy - 3cy + cc$ & ordinando $\frac{a^3 - abb}{c} - cc + 3cy = 2yy$. Ad eundem modum $\frac{aa}{x} - a = x$ multiplicando per x evadit $aa - ax = xx$, & $\frac{aabb}{cxx} = \frac{xx}{a + b - x}$ multiplicando primo per xx, dein per $a + b - x$ evadit $\frac{a^3bb + aab^3 - aabbx}{c} = x^4$.

R E G. IV. *Sicui surdæ quantitati irreducibili litera illa involvatur ad cujus dimensiones æquatio ordinanda est, cæteri omnes termini ad contrarias partes cum signis mutatis transferendi sunt, & utraque pars æquationis in se* semel *multiplicanda si radix* quadratica *sit, vel* bis *si sit* cubica, *&c.*

Sic ad ordinandum juxta x æquationem $\sqrt{aa - ax} + a = x$, transferatur a ad alteras partes, fitque $\sqrt{aa - ax} = x - a$; & quadratis partibus, $aa - ax = xx - 2ax + aa$, seu $0 = xx - ax$ hoc est $x = a$. Sic etiam $\sqrt{3}: \overline{aax + 2axx - x^3} - a + x = 0$, transponendo $-a + x$ evadit $\sqrt{3}: \overline{aax + 2axx - x^3} = a - x$, & partibus cubicè multiplicatis $aax + 2axx - x^3 = a^3 - 3aax + 3axx - x^3$, seu $xx = 4ax - aa$. Et sic $y = \sqrt{ay + yy - a\sqrt{ay - yy}}$ quadratis partibus evadit $yy = ay + yy - a\sqrt{ay - yy}$ & terminis debitè transpositis $ay = a\sqrt{ay - yy}$ seu $y = \sqrt{ay - yy}$, & partibus iterum quadratis $yy = ay - yy$, & transponendo denuo, $2yy = ay$ sive $2y = a$.

R E G. V. *Terminis secundum Dimensiones literæ alicujus ope præcedentium regularum dispositis, si maxima ejusdem literæ dimensio per cognitam quamlibet quantitatem multiplicetur, debet tota æquatio per eandem dividi.*

Sic $2y = a$ dividendo per 2 evadit $y = \frac{1}{2}a$. Et $\frac{bx}{a} = a$ dividendo per $\frac{b}{a}$ evadat $x = \frac{aa}{b}$. Et $\begin{matrix} 2ac \\ -cc \end{matrix} x^3 \begin{matrix} +a^3 \\ +aac \end{matrix} xx \begin{matrix} -2a^3c \\ +aacc \end{matrix} x - a^3cc = 0$ dividendo per $2ac - cc$ evadit

$$x^3 + \frac{\begin{matrix} a^3 \\ aac \end{matrix} xx \begin{matrix} -2a^3c \\ +aacc \end{matrix} x - a^3cc}{2ac - cc} = 0,$$

five $x^3 + \frac{a^3 + aac}{2ac - cc} xx - aax - \frac{a^3c}{2a - c} = 0.$

Reg. VI. *Aliquando reductio institui potest dividendo æquationem per compositam aliquam quantitatem.*

Sic enim $y^3 = \begin{matrix} -2c \\ +b \end{matrix} yy + 3bcy - bbc$, ad hanc $yy = -2cy + bc$ reducitur transferendo terminos omnes ad easdem partes hoc modo, $y^3 \begin{matrix} +2c \\ -b \end{matrix} yy - 3bcy + bbc = 0$, & dividendo per $y - b$ ut in capite de divisione ostensum est: Prodibit enim $yy + 2cy - bc = 0$. Ast hujusmodi divisorum inventio difficilis est & eam prius docuimus.

Reg. VII. *Aliquando etiam reductio per extractionem radicis ex utraque æquationis parte instituitur.*

Quemadmodum si habeatur $xx = \overline{\frac{1}{4}aa - bb}$, extracta utrobique radice prodit $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Quod si habeatur $xx + aa = 2ax + bb$ transfer $2ax$ & exurget $xx - 2ax + aa = bb$, extractisque partium radicibus $x - a = +$ vel $-b$, seu $x = a \pm b$. Sic etiam habito $xx = ax - bb$, adde utrinque $-ax + \frac{1}{4}aa$ & prodit $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - bb$, & extracta utrobique radice $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ seu $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$

Et.

Et ſic univerſaliter: Si ſit $xx = \cdot px \cdot q$, erit $x = \cdot \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp \cdot q}$. Ubi $\frac{1}{2}p$ & q iiſdem ſignis ac p & q in æquatione priori afficienda ſunt; ſed $\frac{1}{4}pp$ ſemper affirmativè ponendum. Eſtque hoc exemplum Regula ad cujus ſimilitudinem æquationes omnes quadraticæ ad formam ſimplicium reduci poſſunt. E.g. Propoſita æquatione $yy = \frac{2xxy}{a} + xx$, ad extrahendam radicem y confer $\frac{2xx}{a}$ cum p, & xx cum q, hoc eſt ſcribe $\frac{xx}{a}$ pro $\frac{1}{2}p$ & $\frac{x^4}{aa} + xx$ pro $\frac{1}{4}pp \cdot q$, atque orietur $y = \frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$ vel $y = \frac{xx}{a} - \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$. Eodem modo æquatio $yy = ay - 2cy + aa - cc$ conferendo $a - 2c$ cum p, & $aa - cc$ cum q, dabit $y = \frac{1}{2}a - c + \sqrt{\frac{5}{4}aa - ac}$. Quinetiam æquatio quadrato-quadratica $x^4 = -aaxx + ab^3$ cujus termini impares deſunt, ope hujus regulæ evadit $xx = -\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + ab^3}$, & extracta iterum radice $x = \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + ab^3}}$. Et ſic in aliis.

Suntque hæ regulæ pro concinnanda æquatione ſolitaria, quarum uſum cum Analyſta ſatis perſpexerit, ita ut æquationem quamcunque propoſitam ſecundum quamlibet literarum in ea complexarum diſponere noverit, & ejuſdem literæ ſi ea unius ſit dimenſionis, aut maximæ poteſtatis ejus ſi plurium, valorem elicere: Haud difficilem ſentiet comparationem plurium æquationum inter ſe; quam pergo jam docere.

De duabus pluribusve æquationibus in unam transformandis ut incognitæ quantitates exterminentur.

CUM in alicujus problematis solutionem plures habentur æquationes statum quæstionis comprehendentes, quarum unicuique plures etiam incognitæ quantitates involvuntur; æquationes istæ (duæ per vices si modo sint plures duabus) sunt ita connectendæ ut una ex incognitis quantitatibus per singulas operationes tollatur, & emergat æquatio nova. Sic habitis æquationibus $2x = y + 5$, & $x = y + 2$, demendo æqualia ex æqualibus prodibit $x = 3$. Et sciendum est quod per quamlibet æquationem una quantitas incognita potest tolli, atque adeo cum tot sunt æquationes quot quantitates incognitæ, omnes possunt ad unam denique reduci in qua unica manebit quantitas incognita. Sin quantitates incognitæ sint unâ plures quàm æquationes habentur tum in æquatione ultimò resultante duæ manebunt quantitates incognitæ, & si sint duabus plures quàm æquationes habentur tum in æquatione ultimò resultante manebunt tres, & sic præterea.

Possunt etiam duæ vel plures quantitates incognitæ per duas tantum æquationes fortasse tolli. Ut si sit $ax - by = ab - az$, & $bx + by = bb + az$: Tum æqualibus ad æqualia additis prodibit $ax + bx = ab + bb$, exterminatis utrisque y & z. Sed ejusmodi casus vel arguunt vitium aliquod in statu quæstionis latere, vel calculum erroneum esse aut non satis artificiosum. Modus autem quo una quantitas incognita per singulas æquationes tollatur ex sequentibus patebit.

Exterminatio quantitatis incognitæ per æqualitatem valorum ejus.

CUM quantitas tollenda unius eſt tantum dimenſionis in utraque æquatione, valor ejus uterque per regulas jam ante traditas quærendus eſt, & alter valor ſtatuendus æqualis alteri.

Sic poſitis $a+x=b+y$ & $2x+y=3b$, ut exterminetur y æquatio prima dabit $a+x-b=y$, & ſecunda dabit $3b-2x=y$. Eſt ergo $a+x-b=3b-2x$, ſive ordinando $x=\frac{4b-a}{3}$.

Atque ita $2x=y$, & $5+x=y$ dant $2x=5+x$ ſeu $x=5$.

Et $ax-2by=ab$, & $xy=bb$ dant $\frac{ax-ab}{2b}(=y)=\frac{bb}{x}$; ſive ordinando $xx-bx-\frac{2b^3}{a}=0$.

Item $\frac{bbx-aby}{a}=ab+xy$, & $bx+\frac{ayy}{c}=2aa$ tollendo x dant $\frac{aby+aab}{bb-ay}(=x)=\frac{2aac-ayy}{bc}$: Et reducendo $y^3-\frac{bb}{a}yy-\frac{2aac-bbc}{a}y+bbc=0$.

Denique $x+y-z=0$ & $ay=xz$ tollendo z dant $x+y(=z)=\frac{ay}{x}$ ſive $xx+xy=ay$.

Hoc idem quoque perficitur ſubducendo alterutrum valorem quantitatis incognitæ ab altero, & ponendo reſiduum æquale nihilo. Sic in exemplorum primo tolle $3b-2x$ ab $a+x-b$ & manebit $a+3x-4b=0$, ſive $x=\frac{4b-a}{3}$.

Exterminatio quantitatis incognitæ ſubſtituendo pro ea valorem ſuum.

CUM in altera ſaltem æquatione, tollenda quantitas unius tantum dimenſionis exiſtit, valor ejus in ea quærendus eſt; & pro ſe in æquationem alteram ſubſtituendus. Sic propoſitis $xyy = b^3$ & $xx + yy = by - ax$; ut extermine-tur x, prima dabit $\frac{b^3}{yy} = x$: Quare in ſecundam ſubſtituo $\frac{b^3}{yy}$ pro x, & prodit $\frac{b^6}{y^4} + yy = by - \frac{ab^3}{yy}$, ac reducendo $y^6 - by^5 + ab^3yy + b^6 = 0$.

Propoſitis autem $ayy + aay = z^3$; & $yz - ay = az$, ut y tollatur, ſecunda dabit $y = \frac{az}{z-a}$. Quare pro y ſubſtituo $\frac{az}{z-a}$ in primam, prodit-que $\frac{a^3zz}{zz - 2az + aa} + \frac{a^3z}{z-a} = z^3$. Et redu-cendo, $z^4 - 2az^3 + aazz - 2a^3z + a^4 = 0$.

Pari modo propoſitis $\frac{xy}{c} = z$ & $cy + zx = cc$, ad z tollendum pro eo ſubſtituo $\frac{xy}{c}$ in æquationem ſecundam, & prodit $cy + \frac{xxy}{c} = cc$.

Cæterum qui in hujuſmodi computationibus exercitatus fuerit ſæpe numero contractiores modos percipiet quibus incognita quantitas exterminari poſſit. Sic habitis $ax = \frac{bbx - b^3}{z}$ & $x = \frac{az}{x-b}$ ſi æqualia multiplicentur æqualibus, prodibunt

æqualia

æqualia $axx = abb$ ſive $x = b$. Sed caſus ejuſmodi particulares ſtudioſis proprio marte cum res tulerit inveſtigandos linquo.

Exterminatio quantitatis incognitæ quæ plurium in utraque æquatione dimenſionum exiſtit.

CUM in neutra æquatione tollenda quantitas unius tantum dimenſionis exiſtit valor maximæ poteſtatis ejus in utraque quærendus eſt; Deinde ſi poteſtates iſtæ non ſint eædem, æquatio poteſtatis minoris multiplicanda eſt per tollendam quantitatem aut per ejus quadratum aut cubum, &c. ut ea evadat ejuſdem poteſtatis cum æquatione altera. Tum valores illarum poteſtatum ponendæ ſunt æquales, & æquatio nova prodibit ubi maxima poteſtas ſive dimenſio tollendæ quantitatis diminuitur. Et hanc operationem iterando quantitas illa tandem auferetur.

Quemadmodum ſit $xx + 5x = 3yy$ & $2xy - 3xx = 4$; ut x tollatur, prima dabit $xx = -5x + 3yy$ & ſecunda $xx = \frac{2xy - 4}{3}$. Pono itaque $3yy - 5x = \frac{2xy - 4}{3}$, & ſic x ad unicam tantum dimenſionem reducitur, adeoque tolli poteſt per ea quæ paulo ante oſtendi. Scilicet æquationem noviſſimam debite reducendo prodit $9yy - 15x = 2xy - 4$, ſive $x = \frac{9yy + 4}{2y + 15}$. Hunc itaq; valorem pro x in aliquam ex æquationibus primo propoſitis (velut in $xx + 5x = 3yy$) ſubſtituo, & oritur $\frac{81y^4 + 72yy + 16}{4yy + 60y + 225} + \frac{45yy + 20}{2y + 15} = 3yy$.

 Quam

Quam, ut in ordinem redigatur, multiplico per $4yy + 60y + 225$, & prodit $81y^4 + 72yy + 16 + 90y^3 + 40y + 675yy + 300 = 12y^4 + 180y^3 + 675yy$, sive $69y^4 - 90y^3 + 72yy + 40y + 316 = 0$.

Præterea si sit $y^3 = xyy + 3x$, & $yy = xx - xy - 3$; ut y tollatur multiplico posteriorem æquationem per y & fit $y^3 = xxy - xyy - 3y$ totidem dimensionum quot prior. Jam ponendo valores ipsius y^3 sibimet æquales habeo $xyy + 3x = xxy - xyy - 3y$, ubi y deprimitur ad duas dimensiones. Per hanc itaque & simpliciorem ex æquationibus primo propositis $yy = xx - xy - 3$ quantitas y prorsus tolli potest insistendo vestigiis prioris exempli.

Sunt & alii modi quibus hæc eadem absolvi possunt; idque sæpenumero contractius. Quemadmodum ex $yy = \frac{2xxy}{a} + xx$ & $yy = 2xy + \frac{x^4}{aa}$; ut y deleatur, extrahe in utraque radicem y sicut in Reg. 7. ostensum est, & prodibunt $y = \frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, & $y = x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$. Jam hos ipsius y valores ponendo æquales habebitur $\frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx} = x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, & rejiciendo æqualia $\sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, restabit $\frac{xx}{a} = x$, vel $xx = ax$ & $x = a$.

Porro ut ex æquationibus $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$ tollatur x, aufer y de partibus

bus æquationis primæ, & reſtat $x + \frac{yy}{x} = 20 - y$, & partibus quadratis fit $xx + 2yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y + yy$ tollendoque utrinque yy reſtat $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y$. Quare cum $400 - 40y$ & 140 iiſdem quantitatibus æquentur, erit $400 - 40y = 140$, ſive $y = 6\frac{1}{2}$. Et ſic opus in pleriſque aliis æquationibus contrahere liceat.

Cæterum cum quantitas exterminanda multarum dimenſionum exiſtit, ad eam ex æquationibus tollendam calculus maxime laborioſus nonnunquam requiritur: Sed labor tunc plurimum minuetur per exempla ſequentia tanquam regulas adhibita.

Reg. I.

Ex $axx + bx + c = 0$, & $fxx + gx + h = 0$,

Exterminato x prodit.

$$\overline{ah - bg - 2cf} \times ah : + \overline{bh - cg} \times bf : + \overline{agg + cff} \times c = 0.$$

Reg. II.

Ex $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, & $fxx + gx + h = 0$,

Exterminato x prodit

$$\overline{ah - bg - 2cf} \times ahh : + \overline{bh - cg - 2df} \times bfh : + \overline{ch - dg} \times \overline{agg + cff} : + \overline{3agh + bgg + dff} \times df = 0.$$

Reg. III.

Ex $ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$, & $fxx + gx + h = 0$,

Exterminato x prodit

$$\overline{ah - bg - 2cf} \times ah^3 : + \overline{bh - cg - 2df} \times bfhh : + \overline{agg + cff} \times \overline{chh - dgh + egg - 2efh} + \overline{3agh + bgg + dff} \times dfh : + \overline{2ahh + 3bgh - dfg + eff} \times eff : - \overline{bg - 2ah} \times efgg = 0.$$

Reg.

Reg. IV.

Ex $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, & $fx^3 + gxx + hx + k = 0$;

Exterminato x prodit

$\overline{ah - bg - 2cf} \times \overline{adhh - achk} : + \overline{ak + bh - cg - 2df} \times bdfh : - \overline{ak + bh + 2cg + 3df} \times aakk : + \overline{cdh - ddg - cck + 2bdk} \times \overline{agg + cff} : + \overline{3agh + bgg + dff - 3afk} \times ddf : - \overline{3ak - bh + cg + df} \times bcfk : + \overline{bk - 2dg} \times bbfk - \overline{bbk - 3adh - cdf} \times agk = 0.$

Verbi gratia, ut ex æquationibus $xx + 5x - 3yy = 0$, & $3xx - 2xy + 4 = 0$ extermine-tur x: in regulam primam pro a, b, c; f, g, & h reſpective ſubſtituo 1, 5, $-3yy$; 3, $-2y$, & 4. Et ſignis $+$ & $-$ probe obſervatis oritur $\overline{4 + 10y + 18yy} \times 4 : + \overline{20 - 6y^3} \times 15 : + \overline{4yy - 27yy} \times -3yy = 0$. Sive $16 + 40y + 72yy + 300 - 90y^3 + 69y^4 = 0$.

Simili ratione ut y deleatur ex æquationibus $y^3 - xyy - 3x = 0$ & $yy + xy - xx + 3 = 0$, in regulam ſecundam pro a, b, c, d; f, g, h, & k ſubſtituo, 1, $-x$, 0, $-3x$; 1, x, $-xx + 3$, & y, reſpective, proditque $\overline{3 - xx + xx} \times \overline{9 - 6xx + x^4} : - \overline{3x + x^3 + 6x} \times \overline{-3x + x^3} : + 3xx \times xx : + \overline{9x - 3x^3 - x^3 - 3x} \times -3x = 0$. Tum delendo ſuperflua & multiplicando, fit $27 - 18xx + 3x^4$, $-9xx + x^6$, $+3x^4 - 18x^2 + 12x^4 = 0$. Et ordinando $x^6 + 18x^4 - 45xx + 27 = 0$.

Hactenus de unica incognita quantitate è duabus æquationibus tollenda. Quod ſi plures è pluribus tollendæ ſunt, opus per gradus peragetur: Ex æquationibus $ax = yz$, $x + y = z$ & $5x = y + 3z$, ſi

ſi quantitas y elicienda ſit, imprimis tolle alteram quantitatum x aut z, puta x ſubſtituendo pro eâ valorem ejus $\frac{yz}{a}$ (per æquationem primam inventum) in æquationem ſecundam ac tertiam. Quo pacto obtinebuntur $\frac{yz}{a} + y = z$, & $\frac{5yz}{a} = y + 3z$: E quibus deinde tolle z ut ſupra.

De modo tollendi quantitates quotcunque ſurdas ex æquationibus.

HUC referre licet quantitatum ſurdarum exterminationem fingendo eas literis quibuſlibet æquales. Quemadmodum ſi ſit $\sqrt{ay} - \sqrt{aa - ay} = 2a + \sqrt[3]{ayy}$, ſcribendo t, pro $\sqrt{ay}$, v pro $\sqrt{aa - ay}$, & x pro $\sqrt[3]{ayy}$ habebuntur æquationes $t - v = 2a + x$, $tt = ay$, $vv = aa - ay$, & $x^3 = ayy$, ex quibus tollendo gradatim t, v, & x reſultabit tandem æquatio libera ab omni Aſymmetria.

Quomodo Quæſtio aliqua ad æquationem redigatur.

POſtquam Tyro in æquationibus pro arbitrio transformandis & concinnandis aliquamdiu exercitatus fuerit, ordo exigit ut ingenii vires in quæſtionibus ad æquationem redigendis tentet. Propoſita autem aliqua Quæſtione, Artificis ingenium in eo præſertim requiritur ut omnes ejus conditiones totidem æquationibus deſignet. Ad quod faciendum perpendet imprimis an propoſitiones ſive ſenten-

ſententiæ quibus enunciatur ſint omnes aptæ quæ terminis algebraicis deſignari poſſint, haud ſecus quam conceptus noſtri characteribus græcis vel latinis. Et ſi ita, (ut ſolet in quæſtionibus quæ circa numeros vel abſtractas quantitates verſantur,) tunc nomina quantitatibus ignotis, atque etiam notis, ſi opus fuerit, imponat; & ſenſum quæſtionis ſermone, ut ita loquar, analytico deſignet. Et conditiones ejus ad algebraicos terminos ſic tranſlatæ tot dabunt æquationes, quot ei ſolvendæ ſufficiunt.

Quemadmodum ſi quærantur tres numeri continue proportionales quorum ſumma ſit 20, & quadratorum ſumma 140; poſitis x, y & z nominibus numerorum trium quæſitorum, Quæſtio è latinis literis in algebraicas vertetur ut ſequitur.

Quæſtio Latine enunciata.	Eadem algebraice.
Quæruntur tres numeri his conditionibus,	$x.\ y.\ z?$
Ut ſint continue proportionales,	$x.y::y.z.$ ſive $xz=yy$
Ut omnium ſumma ſit 20.	$x+y+z=20.$
Et ut quadratorum ſumma ſit 140.	$xx+yy+zz=140.$

Atque ita quæſtio deducitur ad æquationes $xz=yy$, $x+y+z=20$ & $xx+yy+zz=140$, quarum ope x, y & z per regulas ſupra traditas inveſtigandi ſunt.

Cæterum notandum eſt ſolutiones quæſtionum eo magis expeditas & artificioſas ut plurimum evadere quo pauciores incognitæ quantitates ſub initio ponuntur. Sic in hac quæſtione poſito x pro

primo

primo numero & y pro ſecundo, erit $\frac{yy}{x}$ tertius continue proportionalis; quem proinde ponens pro tertio numero quæſtionem ad æquationes ſic reduco.

Quæſtio Latine enunciata.	Eadem Algebraice.
Quæruntur tres numeri continue proportionales,	$x. y. \frac{yy}{x}$?
Quorum ſumma ſit 20,	$x + y + \frac{yy}{x} = 20.$
Et quadratorum ſumma 140.	$xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140.$

Habentur itaque æquationes $x + y + \frac{yy}{x} = 20$ & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$ quarum reductione x & y determinandi ſunt.

Aliud exemplum accipe. Mercator quidam nummos ejus triente quotanis adauget, demptis 100 ℔ quas annuatim impendit in familiam & poſt tres annos fit duplo ditior. Quæruntur nummi.

Ad hoc autem reſolvendum ſciendum eſt quod plures latent propoſitiones quæ omnes ſic eruuntur & enunciantur.

Latine.

Latine.	Algebraice.
Mercator habet nummos quoſdam	x.
Ex quibus anno primo expendit 100 ℔.	$x - 100$.
Et reliquum adauget triente.	$x - 100 + \frac{x - 100}{3}$ ſive $\frac{4x - 400}{3}$.
Annoque ſecundo expendit 100 ℔.	$\frac{4x - 400}{3} - 100$ ſive $\frac{4x - 700}{3}$.
Et reliquum adauget triente.	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9}$ ſive $\frac{16x - 2800}{9}$.
Et ſic anno tertio expendit 100 ℔.	$\frac{16x - 2800}{9} - 100$ ſive $\frac{16x - 3700}{9}$.
Et reliquo trientem ſimiliter lucratus eſt.	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27}$, ſive $\frac{64x - 14800}{27}$.
Fitque duplo ditior quam ſub initio.	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$.

Quæſtio itaque ad æquationem $\frac{64x - 14800}{27} = 2x$ redigitur; cujus reductione eruendus eſt x. Nempe duc eam in 27 & fit $64x - 14800 = 54x$ ſubduc $54x$ & reſtat $10x - 14800 = 0$, ſeu $10x = 14800$, & dividendo per 10 fit $x = 1480$. Quare 1480 ℔ ſunt nummi ſub initio ut & lucrum.

Vides itaque quod ad ſolutiones quæſtionum quæ circa numeros vel abſtractas quantitatum relationes ſolummodo verſantur, nihil aliud fere requiritur quam ut è ſermone Latino vel alio quovis in quo Problema proponitur, tranſlatio fiat in ſermonem (ſi ita loquar) Algebraicum, hoc eſt in Characteres qui apti ſunt ut noſtros de quantitatum relationibus conceptus deſignent. Nonnunquam vero poteſt accidere quod ſermo quocum ſtatus

ſtatus quæſtionis exprimitur ineptus videatur qui in Algebraicum poſſit verti; ſed paucis mutationibus adhibitis, & ad ſenſum potius quam verborum ſonos attendendo verſio reddetur facilis. Sic enim quælibet apud Gentes loquendi formæ propria habent Idiomata: Quæ ubi obvenerint, tranſlatio ex unis in alias non verbo tenus inſtituenda eſt ſed ex ſenſu determinanda. Cæterum ut hujuſmodi problemata hac methodo ad æquationes redigendi familiaritatem convincam & illuſtrem, & cum Artes exemplis facilius quam præceptis addiſcantur, placuit ſequentium problematum ſolutiones adjungere:

PROB. I.

Data duorum numerorum ſumma a & differentia quadratorum b, invenire numeros?

Sit eorum minor x & erit alter $a - x$ eorumque quadrata xx & $aa - 2ax + xx$: Quorum differentia $aa - 2ax$ ſupponitur b. Eſt itaque $aa - 2ax = b$, indeque per reductionem $aa - b = 2ax$ ſeu $\frac{aa - b}{2a} \left(= \frac{1}{2}a - \frac{b}{2a}\right) = x$.

Exempli Gr. Si ſumma numerorum ſeu a ſit 8, & quadratorum differentia ſeu b 16; erit $\frac{1}{2}a - \frac{b}{2a} (= 4 - 1) = 3 = x$ & $a - x = 5$. Quare numeri ſunt 3 & 5.

PROB. II.

Invenire tres quantitates x, y & z quarum paris cujuſque ſumma datur.

Si

Si summa paris x & y sit a; paris x & z, b; ac paris y & z, c: Pro determinandis tribus quæsitis x, y & z tres habebuntur æquationes $x+y=a$, $x+z=b$, & $y+z=c$. Jam ut incognitarum duæ puta y & z exterminentur, aufer x utrinque in prima & secunda æquatione, & emergent $y=a-x$, & $z=b-x$, quos valores pro y & z substitue in tertia, & orietur $a-x+b-x=c$ & per reductionem $x=\frac{a+b-c}{2}$. Invento x æquationes superiores $y=a-x$ & $z=b-x$ dabunt y & z.

Exemp. Si summa paris x & y sit 9, paris x & z 10, & paris y & z 13; tum in valoribus x, y & z scribe 9 pro a, 10 pro b, & 13 pro c; & evadet $a+b-c=6$, adeoq; $x\ (=\frac{a+b-c}{2})=3$, $y\ (=a-x)=6$, & $z\ (=b-x)=7$.

PROB. III.

Quantitatem datam ita in partes quotcunque dividere ut majores partes superent minimam per datas differentias.

Sit a quantitas in quatuor ejusmodi partes dividenda, ejusque prima atque minima pars x, & super hanc excessus secundæ partis b, tertiæ partis c & quartæ partis d; & erit $x+b$ secunda pars, $x+c$ tertia pars & $x+d$ quarta pars, quarum omnium aggregatum $4x+b+c+d$ æquatur toti lineæ a. Aufer jam utrinque $b+c+d$ & restat $4x=a-b-c-d$ sive $x=\frac{a-b-c-d}{4}$.

Exempl. Proponatur linea 20 pedum sic in 4 partes distribuenda ut super primam partem excessus

ſus ſecundæ ſit 2 pedum tertiæ 3 ped. & quartæ 7 ped. Et quatuor partes erunt x ($= \frac{a-b-c-d}{4}$ ſive $\frac{20-2-3-7}{4}$) $= 2$, $x+b=4$, $x+c=5$, & $x+d=9$.

Eodem modo quantitas in plures partes iiſdem conditionibus dividitur.

PROB. IV.

Viro cuidam nummos inter mendicantes diſtribuere volenti, deſunt octo denarii quo minus det ſingulis tres denarios. Dat itaque ſingulis duos denarios & tres denarii ſuperſunt. Quæritur numerus mendicantium.

Eſto numerus mendicantium x & deerunt 8 denarii quo minus det omnibus $3x$ denarios; habet itaque $3x-8$ denarios. Ex his autem dat $2x$ denarios, & reliqui denarii $x-8$ ſunt tres. Hoc eſt $x-8=3$ ſeu $x=11$.

PROB. V.

Si Tabellarii duo A & B 59 milliaribus diſtantes tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B 8 mill. in 3 horis, ac B una hora ſerius iter inſtituit quam A: Quæritur longitudo itineris quod A conficiet antequam conveniet B.

Dic longitudinem illam x; & erit $59-x$ longitudo itineris B: Et cum A pertranſeat 7 mill. in 2 hor. pertranſibit ſpatium x in $\frac{2x}{7}$ horis, eo quod ſit 7 mill. 2 hor. :: x mill. $\frac{2x}{7}$ hor. Atque ita cum B pertranſeat 8 mill. in 3 hor. pertranſi-

bit

bit spatium suum $59 - x$ in $\frac{177 - 3x}{8}$ horis. Jam cum horum temporum differentia sit 1 hor; ut evadant æqualia adde differentiam illam breviori tempori nempe tempori $\frac{177 - 3x}{8}$, & emerget $1 + \frac{177 - 3x}{8} = \frac{2x}{7}$. Et per reductionem $35 = x$. Nam multiplicando per 8 fit $185 - 3x = \frac{16x}{7}$. Dein multiplicando etiam per 7 fit $1295 - 21x = 16x$, seu $1295 = 37x$. Et dividendo denique per 37, exoritur $35 = x$. Sunt itaque 35 mill. iter quod A conficiet antequam conveniet B.

Idem generalius.

Datis duorum mobilium A & B eodem cursu pergentium celeritatibus, una cum intervallo locorum ac temporum à quibus incipiunt moveri: Determinare metam in qua convenient.

Pone mobilis A eam esse celeritatem qua spatium c pertransire possit in tempore f, & mobilis B eam esse qua spatium d pertransire possit in tempore g; & locorum intervallum esse e, ac h temporum in quibus moveri incipiunt.

CASUS I.

Deinde si ambo ad easdem plagas tendant, & A sit mobile quod sub initio motus longius distat a meta: Pone distantiam illam esse x, indeque aufer intervallum e, & restabit $x - e$ pro distantia B a meta. Et cum A pertranseat spatium c in tempore f, tempus in quo pertransibit spatium x erit

erit $\frac{fx}{c}$, eo quod ſit ſpatium c ad tempus f, ut ſpatium x ad tempus $\frac{fx}{c}$. Atque ita cum B pertranſeat ſpatium d in g, tempus in quo pertranſibit ſpatium $x - e$ erit $\frac{gx - ge}{d}$. Jam cum horum temporum differentia ſupponatur h, ut ea evadant æqualia adde h breviori tempori, nempe tempori $\frac{fx}{c}$ ſi modo B prius incipiat moveri, & evadet $\frac{fx}{c} + h = \frac{gx - ge}{d}$. Et per reductionem $\frac{cge + cdh}{cg - df}$ vel $\frac{ge + dh}{g - \frac{d}{c}f} = x$. Sin A prius moveri incipiat adde h tempori $\frac{gx - ge}{d}$ & evadet $\frac{fx}{c} = h + \frac{gx - ge}{d}$, & per reductionem $\frac{cge - cdh}{cg - df} = x$.

CASUS II.

Quod ſi mobilia obviam eant, & x ut ante ponatur initialis diſtantia mobilis A a meta, tum $e - x$ erit initialis diſtantia ipſius B ab eadem meta; & $\frac{fx}{c}$ tempus in quo A conficiet diſtantiam x, atque $\frac{ge - gx}{d}$ tempus in quo B conficiet diſtantiam ſuam $e - x$. Quorum temporum minori, ut ſupra, adde differentiam h, nempe tempori $\frac{fx}{c}$ ſi B

prius incipiat moveri, & ſic habebitur $\frac{fx}{c} + h = \frac{ge - gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge - cdh}{cg + df} = x$. Sin A prius incipiat moveri, adde h tempori $\frac{ge - gx}{d}$ & evadet $\frac{fx}{c} = h + \frac{ge - gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge + cdh}{cg + df} = x$.

Exempl. I. Si quotidie Sol unum gradum conficit & Luna tredecim, & ad tempus aliquod, Sol ſit in principio Cancri atque poſt tres dies Luna in principio Arietis: Quæritur locus conjunctionis proxime futuræ. Reſp. in $10\frac{3}{4}$ gr. Cancri. Nam cum ambo ad eaſdem plagas eant, & ſerior ſit Epocha motus lunæ quæ longius diſtat a meta: Erit A Luna, B Sol, & $\frac{cge + cdh}{cg - df}$ longitudo itineris lunaris, quæ, ſi ſcribatur 13 pro c; 1 pro f, d, ac g; 90 pro e; & 3 pro h; evadet $\frac{13 \times 1 \times 90 + 13 \times 1 \times 3}{13 \times 1 - 1 \times 1}$; hoc eſt $\frac{1209}{12}$, ſive $100\frac{3}{4}$. Hos itaque gradus adjice pincipio Arietis & prodibit $10\frac{3}{4}$ gr. Cancri.

Exempl. II. Si Tabellarii duo A & B 59 milliaribus diſtantes tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B 8 milliaria in 3 horis, & B una hora ſerius iter inſtituit quam A: Quæritur iter quod A conficiet antequam conveniat B. Reſp. 35 mill. Nam cum obviam eant & A primo inſtituat iter, erit $\frac{cge + cdh}{cg + df}$ iter quæ-

ſitum.

ſitum. Et hoc, ſcribatur 7 pro c, 2 pro f, 8 pro d, 3 pro g, 59 pro e, & 1 pro h, evadet $\frac{7\times3\times59+7\times8\times1}{7\times3+8\times2}$; hoc eſt $\frac{1295}{37}$ ſive 35.

PROB. VI.

Data agentis alicujus poteſtate, invenire quot ejuſmodi agentes datum effectum a in dato tempore b producent.

Sit ea agentis poteſtas qua effectum c producere poteſt in tempore d, & erit ut tempus d ad tempus b, ita effectus c quem agens iſte producere poteſt in tempore d, ad effectum quem poteſt producere in tempore b, qui proinde erit $\frac{bc}{d}$. Deinde ut unius agentis effectus $\frac{bc}{d}$ ad omnium effectum a, ita agens iſte unicus ad omnes agentes: Adeoque agentium numerus erit $\frac{ad}{bc}$.

Exempl. Si ſcriba in 8 diebus 15 folia deſcribere poteſt, quot ejuſmodi ſcribæ requiruntur ad deſcribendum 405 folia in 9 diebus? Reſp. 24. Nam ſi ſubſtituantur 8 pro d, 15 pro c, 405 pro a & 9 pro b, numerus $\frac{ad}{bc}$ evadet $\frac{405\times8}{9\times15}$ hoc eſt $\frac{3240}{135}$, ſive 24.

PROB. VII.

Datis plurium agentium viribus, tempus x determinare in quo datum effectum d conjunctim producent.

Agentium A, B, C, vires ponantur quæ in temporibus e, f, g producant effectus a, b, c reſpective; & hæ in tempore x producent effectus

$\frac{ax}{e}, \frac{bx}{f}, \frac{cx}{g}$. Quare est $\frac{ax}{e} + \frac{bx}{f} + \frac{cx}{g} = d$, & per reductionem $x = \frac{d}{\frac{a}{e} + \frac{b}{f} + \frac{c}{g}}$.

Exempl. Tres mercenarii opus aliquod certis temporibus perficere possunt, *viz.* A semel in tribus septimanis, B ter in octo septimanis, & C quinquies in duodecim septimanis. Quæritur quanto tempore simul absolvent? Sunt itaque Agentium A, B, C vires quæ temporibus 3, 8, 12 producant effectus 1, 3, 5 respective: Et quæritur tempus quo absolvent effectum 1. Quare pro $a, b, c; d; e, f, g$ scribe 1, 3, 5, 1, 3, 8, 12, & proveniet $x = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{3}{8} + \frac{5}{12}}$ sive $\frac{8}{9}$ sept. hoc est 6 dies $5\frac{1}{3}$ horæ, tempus quo simul absolvent.

PROB. VIII.

Dissimiles duarum pluriumve rerum misturas ita componere ut res illæ commistæ datam inter se rationem acquirant.

Sit unius misturæ data quantitas $dA + eB + fC$, alterius eadem quantitas $gA + hB + kC$, & eadem tertiæ $lA + mB + nC$ ubi A, B, & C denotent res mistas, & d, e, f, g, h, &c. Proportiones earundem in misturis. Et sit $pA + qB + rC$ mistura quam ex his tribus oportet componere; fingeque x, y & z numeros esse per quos si tres datæ misturæ respective multiplicentur, earum summa evadet $pA + qB + rC$.

$$\text{Est itaque } \left.\begin{array}{l} dxA + exB + fxC \\ +gyA + hyB + kyC \\ +lzA + mzB + nzC \end{array}\right\} = pA + qB + rC,$$

Adeo-

Adeoque collatis terminis $dx+gy+lz=p$, $ex+hy+mz=q$, & $fx+ky+nz=r$, & per reductionem $x=\frac{p-gy-lz}{d}=\frac{q-hy-mz}{e}$ $=\frac{r-ky-nz}{f}$. Et rursus æquationes $\frac{p-gy-lz}{d}$ $=\frac{q-hy-mz}{e}$ & $\frac{q-hy-mz}{e}=\frac{r-ky-nz}{f}$ per reductionem dant $\frac{ep-dq+dmz-elz}{eg-dh}$ $(=y)=\frac{fq-er+enz-fmz}{fh-ek}$: Quæ, si abbrevietur scribendo α pro $ep-dq$, β pro $dm-el$, γ pro $eg-eh$ δ pro $fq-er$, ζ pro $en-fm$, & θ pro $fh-ek$, evadet $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=\frac{\delta+\zeta z}{\theta}$, & per reductionem $\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}=z$. Invento z pone $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=y$ & $\frac{p-gy-lz}{d}=x$.

EXEMPL. Si tres sint metallorum colliquefactorum misturæ, quarum primæ pondo continet argenti ℥ 12, æris ℥ 1, & stanni ℥ 3, secundæ pondo continet argenti ℥ 1, æris ℥ 12, & stanni ℥ 3, & tertiæ pondo continet æris ℥ 14, stanni ℥ 2, & argenti nihil; sintque hæ misturæ ita componendæ ut pondo compositionis contineat argenti ℥ 4 æris ℥ 9 & stanni ℥ 3: Pro d, e, f; g, h, k; l, m, n; p, q, r scribe 12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3 respective, & erit α $(=ep-dq=1\times4-12\times9)=-104$, & β $(=dm-el=12\times14-1\times0)=168$, & sic $\gamma=-143$, $\delta=24$, $\zeta=-40$, & $\theta=33$. Adeoque z $\left(=\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}=\frac{-3432+3432}{5720-5544}\right)=0$,

 y (=

$y\left(=\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=\frac{-104+0}{-143}\right)=\frac{8}{11}$, & $x\left(=\frac{p-gy-lz}{d}\right.$ $\left.=\frac{4-\frac{8}{11}}{12}\right)=\frac{3}{11}$. Quare si misceantur $\frac{8}{11}$ partes pondo misturæ secundæ, $\frac{3}{11}$ partes pondo primæ & nihil tertiæ aggregatum erit pondo continens quatuor uncias argenti, novem æris, & tres stanni.

PROB. IX.

Datis plurium ex iisdem rebus misturarum pretiis, & proportionibus mistorum inter se, pretium cujusvis è mistis determinare.

Cujusvis rerum A, B, C, misturæ $dA+gB+lC$ pretium esto p, misturæ $eA+hB+mC$ pretium q, & misturæ $fA+kB+nC$ pretium r; & rerum illarum A, B, C quærantur pretia x, y & z. Utpote pro rebus A, B, & C substitue earum pretia x, y & z, & exurgent æquationes $dx+gy+lz=p$, $ex+hy+mz=q$, & $fx+ky+nz=r$, ex quibus pergendo ut in præcedente Problemate, elicientur itidem $\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}=z$, $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=y$, & $\frac{p-gy-lz}{d}=x$.

Exempl. Emit quidam 40 modios tritici, 24 modios hordei, & 20 modios avenæ simul 15 libris 12 solidis; Deinde consimilis grani emit 26 modios tritici, 30 modios hordei, & 50 modios avenæ simul 16 libris: Ac tertio consimilis etiam grani emit 24 modios tritici, 120 modios hordei & 100 modios avenæ simul 34 lib. Quæritur quanti æstimandus sit modius cujusque grani? Resp. Modius tritici 5 solidis, hordei 3 solidis & avenæ 2 solidis. Nam pro d, g, l; e, h, m; f, k, n; p, q, & r scribendo respective 40, 24, 20; 26, 30, 50; 24, 120,

120, 100; $15\frac{3}{5}$, 16, & 34; prodit α $(= ep - dq = 26 \times 15\frac{3}{5} - 40 \times 16) = -234\frac{2}{5}$; & β $(= dm - el = 40 \times 50 - 26 \times 20) = 1480$. Atque ita $\gamma = -576$, $\delta = -500$, $\zeta = 1400$, & $\theta = -2400$. Adeoq; $z \left(= \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{562560 - 288000}{-806400 + 3552000} = \frac{274560}{2745600}\right) = \frac{1}{10}$, $y \left(= \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-234\frac{2}{5} + 148}{-576}\right) = \frac{3}{20}$. Et $x \left(= \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{15\frac{3}{5} - \frac{18}{5} - 2}{40}\right) = \frac{1}{4}$. Constitit itaque modius tritici $\frac{1}{4}$ ℔ seu 5 solidis, modius hordei $\frac{3}{20}$ ℔ seu 3 solidis, & modius avenæ $\frac{1}{10}$ ℔ seu 2 solidis.

PROB. X.

Datis & misturæ & mistorum gravitatibus specificis invenire proportionem mistorum inter se.

Sit e gravitas specifica misturæ $A + B$ cujus A gravitas specifica est a, & B gravitas b: & cum gravitas absoluta seu pondus componatur ex mole corporis & gravitate specifica, erit aA pondus ipsius A, bB pondus ipsius B & $eA + eB$ pondus aggregati $A + B$, adeoque $aA + bB = eA + eB$, indeque $aA - eA = eB - bB$ seu $e - b.\ a - e :: A.\ B$.

EXEMPL. Sit auri gravitas ut 19, argenti ut $10\frac{1}{3}$, & Coronæ Hieronis ut 17; eritque 10. 3 $(:: e - b.\ a - e :: A.\ B)$ :: moles in auri corona, ad molem argenti, vel 190. 31 $(:: 19 \times 10.\ 10\frac{1}{3} \times 3 :: a \times \overline{e - b}.\ b \times \overline{a - e})$ :: pondus auri in corona, ad pondus argenti, & 221. 31 :: pondus coronæ, ad pondus argenti.

PROB.

PROB. XI.

Si boves a depascant pratum b in tempore c; & boves d depascant pratum æque bonum e in tempore f, & gramen uniformiter crescat: Quæritur quot boves depascent pratum simile g in tempore h.

Si boves a in tempore c depascant pratum b; tum per analogiam boves $\frac{e}{b}a$ in eodem tempore c, vel boves $\frac{ec}{bf}a$ in tempore f, vel boves $\frac{ec}{bh}a$ in tempore h, depascent pratum e: puta si gramen post tempus c non cresceret. Sed cùm propter graminis incrementum boves d in tempore f, depascant solummodo pratum e, ideo graminis in prato e incrementum illud per tempus $f-c$ tantum erit quantum per se sufficit pascendis bobus $d-\frac{eca}{bf}$ per tempus f, hoc est quantum sufficit pascendis bobus $\frac{df}{h}-\frac{eca}{bh}$ per tempus h. Et in tempore $h-c$ per analogiam tantum erit incrementum quantum per se sufficit pascendis bobus $\frac{h-c}{f-c}$ in $\frac{df}{h}-\frac{eca}{bh}$ sive $\frac{bdfh-ecah-bdcf+aecc}{bfh-bch}$. Hoc incrementum adjice bobus $\frac{aec}{bh}$ & prodibit $\frac{bdfh-ecah-bdcf+ecfa}{bfh-bch}$ numerus boum quibus pascendis sufficit pratum e per tempus h. Adeoque per analogiam pratum g bobus

$bdfgh$

$\frac{bdfgh - ecagh - bdcgf + ecfga}{befh - bceh}$ per idem tempus h paſcendis ſufficiet.

Exempl. Si 12 boves depaſcant $3\frac{1}{3}$ jugera prati in 4 ſeptimanis; & 21 boves depaſcant 10 jugera conſimilis prati in 9 ſeptimanis; quæritur quot boves depaſcant 24 jugera in 18 ſeptimanis? Reſp. 36. Iſte enim numerus invenietur ſubſtituendo in $\frac{bdfgh - ecagh - bdcgf + ecfga}{befh - bceh}$ numeros 12, $3\frac{1}{3}$, 4, 21, 10, 9, 24, & 18 pro literis a, b, c, d, e, f, g & h reſpective. Sed ſolutio forte haud minus expedita erit ſi è primis principiis ad formam ſolutionis præcedentis literalis eruatur. Utpote ſi 12 boves in 4 ſeptimanis depaſcant $3\frac{1}{3}$ jugera, tum per analogiam 36 boves in 4 ſeptimanis vel 16 boves in 9 ſeptimanis vel 8 boves in 18 ſeptimanis depaſcent 10 jugera: Puta ſi gramen non creſceret. Sed cum propter graminis incrementum 21 boves in 9 ſeptimanis depaſcant ſolummodo 10 jugera, illud graminis in 10 jugeris per poſteriores 5 ſeptimanas incrementum tantum erit quantum per ſe ſufficit exceſſui boum 21 ſupra 16, hoc eſt 5 bobus per 9 ſeptimanas, vel quod perinde eſt $\frac{5}{2}$ bobus per 18 ſeptimanas paſcendis. Et in 14 ſeptimanis (exceſſu 18 ſupra 4 primas) incrementum illud graminis per analogiam tantum erit quantum ſufficiat 7 bobus per 18 ſeptimanas paſcendis; eſt enim 5 ſept. 14 ſept. $\frac{5}{2}$ boves 7 boves. Quare 8 bobus quos 10 jugera ſine incremento graminis paſcere poſſunt per 18 ſeptimanas adde hoſce 7 boves quibus paſcendis ſolum incrementum graminis ſufficit, & ſumma erit 15 boves. Ac denique ſi 10 jugera 15 bobus per 18 ſeptimanas paſcendis ſufficiant, tum per analogiam 24 jugera per idem tempus ſufficient 36 bobus.

PROB.

PROB. XII.

Datis sphæricorum corporum in eadem recta motorum, sibique occurrentium magnitudinibus & motibus, determinare motus eorundem post reflexionem.

Hujus resolutio ex his dependet conditionibus, ut corpus utrumque tantum reactione patiatur quantum agit in alterum, & ut eadem celeritate post reflexionem recedant ab invicem qua ante accedebant. His positis sint corporum A & B celeritates a & b respective; & motus (siquidem componantur ex mole & celeritate corporum) erunt aA & bB. Et si corpora ad easdem plagas tendant, & A celerius movens insequatur B, pone x decrementum motus aA, & incrementum motus bB percussione exortum; & post reflexionem motus erunt $aA - x$ & $bB + x$; & celeritates $\frac{aA - x}{A}$ ac $\frac{bB + x}{B}$ quarum differentia æquatur $a - b$ differentiæ celeritatum ante reflexionem. Habetur itaque æquatio $\frac{bB + x}{B} - \frac{aA - x}{A} = a - b$, & inde per reductionem fit $x = \frac{2aAB - 2bAB}{A + B}$, quo pro x in celeritatibus $\frac{aA - x}{A}$ & $\frac{bB + x}{B}$ substituto prodeunt $\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$ celeritas ipsius A, & $\frac{2aA - bA + bB}{A + B}$ celeritas ipsius B post reflexionem.

Quod ſi corpora obviam eant, tum ſigno ipſius b ubique mutato, celeritates poſt reflexionem erunt $\frac{aA - aB - 2bB}{A + B}$ & $\frac{2aA + bA - bB}{A + B}$: Quarum alterutra ſi forte negativa obvenerit, id arguit motum illum poſt reflexionem ad plagam dirigi ei contrariam ad quam A tendebat ante reflexionem. Id quod etiam de motu ipſius A in caſu priori intelligendum eſt.

Exempl. Si corpora homogenea A trium librarum cum celeritatis gradibus 8, & B novem librarum cum celeritatis gradibus 2 ad eaſdem plagas tendant: tunc pro A, a, B & b ſcribe 3, 8, 9 & 2; & $\left(\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}\right)$ evadit -1, ac $\left(\frac{2aA - bA + bB}{A + B}\right)$ 5. Recedet itaque A cum uno gradu celeritatis poſt reflexionem, & B cum quinque gradibus progredietur.

PROB. XIII.

Invenire tres numeros continue proportionales quorum ſumma ſit 20, & quadratorum ſumma 140.

Pone numerorum primum x, & ſecundum y; eritque tertius $\frac{yy}{x}$, adeoque $x + y + \frac{yy}{x} = 20$; & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$. Et per reductionem $xx \begin{smallmatrix} + y \\ - 20 \end{smallmatrix} x + yy = 0$, & $x^4 \begin{smallmatrix} + yy \\ - 140 \end{smallmatrix} xx + y^4 = 0$. Jam ut exterminetur x, pro a, b, c, d, e, f, g & h in Reg. 3. ſubſtitue reſpective 1, 0, $yy - 140$, 0, y^4; 1, $y - 20$, & yy; Et emerget $\overline{-yy + 280} \times y^6 : \overline{+2yy - 40y + 260} \times \overline{260y^4 - 40y^5} : + 3y^4 \times y^4$:

$y^4 : -2yy \times \overline{y^6 - 40y^5 + 400y^4 :} = 0$. Et per multiplicationem $1600y^6 - 20800y^5 - 67600y^4 = 0$. Ac reducendo $4yy - 52y + 169 = 0$. Sive (radice extracta) $2y - 13 = 0$ seu $y = 6\frac{1}{2}$, Id quod etiam brevius alia methodo sed minus obvia supra inventum est. Porro ut inveniatur x substitue $6\frac{1}{2}$ pro y in æquatione $xx \begin{smallmatrix} +y \\ -20 \end{smallmatrix} x + yy = 0$. Et exurget $xx - 13\frac{1}{2}x + 42\frac{1}{4} = 0$, seu $xx = 13\frac{1}{2}x + 42\frac{1}{4}$. Et extracta radice $x = 6\frac{3}{4} +$ vel $- \sqrt{3\frac{5}{16}}$. Nempe $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$ est maximus quæsitorum trium numerorum, & $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$ minimus. Nam x alterutrum extremorum numerorum ambigue designat, indeque gemini prodeunt valores, quorum alteruter potest esse x, existente altero $\frac{yy}{x}$.

Idem aliter. Positis numeris x, y & $\frac{yy}{x}$ ut ante, erit $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, seu $xx = \begin{smallmatrix} 20 \\ -y \end{smallmatrix} x - yy$ & extracta radice $x = 10 - \frac{1}{2}y + \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}yy}$ primus numerus: Hunc & y aufer de 20 & restat $\frac{yy}{x} = 10 - \frac{1}{2}y - \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}yy}$ tertius numerus. Estque summa quadratorum à tribus hisce numeris $400 - 40y$, adeoque $400 - 40y = 140$, sive $y = 6\frac{1}{2}$. Invento medio numero $6\frac{1}{2}$, substitue eum pro y in primo ac tertio numero supra invento; & evadet primus $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$ ac tertius $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$ ut ante.

PROB. XIV.

Invenire quatuor numeros continue proportionales quorum duo medii simul constituant 12, *&* *duo extremi* 20.

Sit

Sit x secundus numerus; & erit $12-x$ tertius; $\frac{xx}{12-x}$ primus; & $\frac{144-24x+xx}{x}$ quartus; adeoque $\frac{xx}{12-x}+\frac{144-24x+xx}{x}=20$. Et per reductionem $xx=12x-30\frac{6}{7}$ seu $x=6+\sqrt{5\frac{1}{7}}$. Quo invento cæteri numeri è superioribus dantur.

PROB. XV.

Invenire quatuor numeros continue proportionales, quorum datur summa a, & summa quadratorum b.

Etsi desideratas quantitates ut plurimum immediate quærere solemus, siquando tamen duæ obvenerint ambiguæ, hoc est quæ conditionibus omnino similibus præditæ sunt, (ut hic duo medii & duo extremi numerorum quatuor proportionalium) præstat alias quantitates non ambiguas quærere per quas hæ determinantur, quemadmodum harum summam vel differentiam vel rectangulum. Ponamus ergo summam duorum mediorum numerorum esse s, & rectangulum r; & erit summa extremorum $a-s$, & rectangulum etiam r propter proportionalitatem. Jam ut ex his eruantur quatuor illi numeri, pone x primum & y secundum; eritque $s-y$ tertius; & $a-s-x$ quartus; & rectangulum sub mediis $sy-yy=r$, indeque medii $y=\frac{1}{2}s+\sqrt{\frac{1}{4}ss-r}$ & $s-y=\frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}ss-r}$: Item rectangulum sub extremis $ax-sx-xx=r$, indeq; extremi $x=\frac{a-s}{2}+\sqrt{\frac{ss-2as+aa}{4}-r}$, & $a-s-x=\frac{a-s}{2}-\sqrt{\frac{ss-2as+aa}{4}-r}$.

Summa

Summa quadratorum ex hisce quatuor numeris est $2ss - 2as + aa - 4r$ quæ est $= b$. Ergo $r = \frac{1}{2}ss - \frac{1}{2}as + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}b$, quo substituto pro r prodeunt quatuor numeri ut sequitur.

$$\text{Duo medii} \begin{cases} \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}. \\ \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}. \end{cases}$$

$$\text{Duo extremi} \begin{cases} \frac{a-s}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}. \\ \frac{a-s}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}. \end{cases}$$

Restat tamen etiamnum inquirendus valor ipsius s. Quare ad abbreviandos terminos pro numeris hisce substitue.

$$\frac{1}{2}s + p. \qquad \frac{a-s}{2} + q.$$

&

$$\frac{1}{2}s - p. \qquad \frac{a-s}{2} - q.$$

Et pone rectangulum sub secundo & quarto æquale quadrato tertii siquidem hæc problematis conditio nondum impleatur, eritque $\frac{as - ss}{4} - \frac{1}{2}qs + \frac{pa - ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss - ps + pp$. Pone etiam rectangulum sub primo & tertio æquale quadrato secundi, & erit $\frac{as - ss}{4} + \frac{1}{2}qs \frac{-pa + ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss + ps + pp$. Harum æquationum priorem aufer è posteriori & restabit $qs - pa + ps = 2ps$, seu $qs = pa + ps$. Restitue jam

$\sqrt{\frac{1}{4}b -}$

$\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}aa}$ in locum p, & $\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss}$ in locum q, & habebitur $s\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss}=a+s\times\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}aa}$. Et quadrando $ss=-\frac{b}{a}s+\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}b$, seu $s=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{bb}{4aa}+\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}b}$, quo invento dantur quatuor numeri quæsiti è superioribus.

PROB. XVI.

Si pensio annua librarum a per quinque annos proxime sequentes solvenda, ematur parata pecunia c, quæritur quanti æstimanda sit usura usuræ centum librarum per annum.

Pone $1-x$ usuram usuræ pecuniæ x in anno, hoc est quod pecunia 1 post annum solvenda valeat x paratæ pecuniæ; & per analogiam pecunia a post annum solvenda valebit ax paratæ pecuniæ, post duos annos axx, post tres ax^3, post quatuor ax^4 & post quinque ax^5. Adde jam hos quinque terminos & erit $ax^5+ax^4+ax^3+axx+ax=c$, seu $x^5+x^4+x^3+xx+x=\frac{c}{a}$, æquatio quinque dimensionum, cujus ope cum x per † regulas post docendas inventum fuerit, pone $x.\ 1::100.\ y$. Et erit $y-100$ usura usuræ centum librarum per annum.

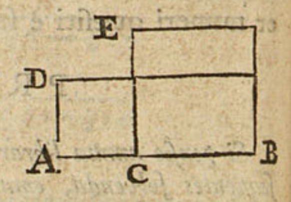
Atque has in quæstionibus ubi solæ quantitatum proportiones absque positionibus linearum considerandæ veniunt, instantias dedisse sufficiat: Pergamus jam ad Problematum Geometricorum solutiones.

 Quo-

† *Nempe inveniendo figuras primas radicis per constructionem quamvis mechanicam & reliquas per methodum Vietæ.*

Quomodo Quæstiones Geometricæ ad æquationem redigantur.

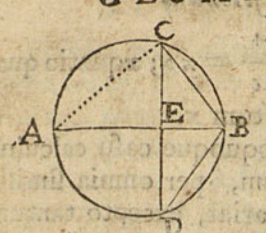
QUæstiones *Geometricæ* eadem facilitate iisdemque legibus ad æquationes nonnunquam redigi possunt ac quæ de abstractis quantitatibus proponuntur. Ut si recta AB in extrema & media proportione secanda sit in C, hoc est ita ut BE quadratum maximæ partis sit æquale rectangulo BD sub tota & minore parte contento: Posito



$AB = a$, & $BC = x$ erit $AC = a - x$, & $xx = a$ in $a - x$; æquatio quæ per reductionem dat $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$.

Sed in rebus Geometricis quæ frequentius occurrunt, à variis linearum positionibus & relationibus complexis ita dependere solent ut egeant ulteriori inventione & artificio quo ad Algebraicos terminos deduci possint. Et licet in hujusmodi casibus difficile sit aliquid præscribere, & cujusque ingenium sibi debeat esse operandi norma: Conabor tamen discentibus viam præsternere. Sciendum est itaque quod quæstiones circa easdem lineas definito quolibet modo sibi invicem relatas, possint varie proponi, ponendo alias atque alias quærendas esse ex aliis atque aliis datis. Sed de quibuscunque tamen datis vel quæsitis instituitur quæstio, solutio ejus eadem plane methodo ex Analyseos serie perficietur, nulla omnino circumstantia variata præter fictas linearum species sive nomina quibus datas à quæsitis solemus distinguere. Quemadmodum si quæstio sit de Isoscele CBD in circulum inscripto, cujus latera BC, BD, & basis CD

cum



cum diametro circuli AB conferenda sunt: Ea vel proponi potest de investigatione *diametri* ex datis lateribus & basi, vel de investigatione *basis* ex datis lateribus & diametro, vel denique de investigatione *laterum* ex datis basi & diametro: Sed utcunque proponitur, redigetur ad æquationem per eandem seriem Analyseos. Nempe si quæratur *Diameter* pono $AB = x$, $CD = a$, & BC vel $BD = b$. Tum (ducta AC) propter similia triangula ABC & CBE est AB. BC :: BC. BE, sive $x.\ b :: b.$ BE. Quare $BE = \frac{bb}{x}$. Est & $CE = \frac{1}{2}CD$ sive $\frac{1}{2}a$: Et propter angulum CEB rectum, $CEq + BEq = BCq$, hoc est $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$. Quæ æquatio per reductionem dabit quæsitum x.

Sin quæratur *Basis*, pono $AB = c$, $CD = x$, & BC vel $BD = b$. Tum (ducta AC) propter similia triangula ABC & CBE est AB. BC :: BC. BE, sive $c.\ b :: b.$ BE. Quare $BE = \frac{bb}{c}$. Est & $CE = \frac{1}{2}CD$ sive $\frac{1}{2}x$, & propter angulum CEB rectum $CEq + BEq = BCq$ hoc est $\frac{1}{4}xx + \frac{b^4}{cc} = bb$; æquatio quæ per reductionem dabit quæsitum x.

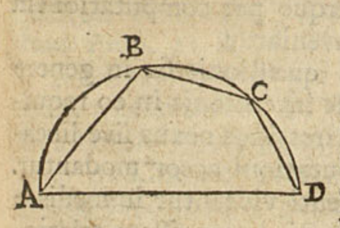
Atque ita si *Latus* BC vel BD quæratur, pono $AB = c$, $CD = a$ & BC vel $BD = x$. Et (AC ut ante ducta) propter similia triangula ABC & CBE est AB. BC :: BC. BE; sive $c.\ x :: x.$ BE. Quare $BE = \frac{xx}{c}$. Est & $CE = \frac{1}{2}CD$ sive $\frac{1}{2}a$; & propter angulum CEB rectum est $CEq + BEq = BCq$,

$= BCq$, hoc est $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$; æquatio quæ per reductionem dabit quæsitum x.

Vides itaque quod in unoquoque casu calculus quo pervenitur ad æquationem, per omnia similis sit, & eandem æquationem pariat, excepto tantum quod lineas aliis atque aliis literis designavi prout datæ vel quæsitæ ponuntur. Ex diversis quidem datis & quæsitis oritur diversitas in reductione æquationis inventæ: Nam æquationis $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$ alia est reductio ut obtineatur $x = \frac{2bb}{\sqrt{4bb - aa}}$ valor de AB, & æquationis $\frac{1}{4}xx + \frac{b^4}{cc} = bb$ alia reductio ut obtineatur $x = \frac{2b}{c}\sqrt{cc - bb}$ valor de CD; & æquationis $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$ reductio longe alia ut obtineatur $x = \sqrt{\frac{1}{2}cc \pm \frac{1}{2}c\sqrt{cc - aa}}$ valor de BC vel BD: (perinde ut hæc $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{cc} = bb$, ad eliciendum c, a, vel b diversis modis reduci debet:) sed in harum æquationum inventione nulla fuit diversitas. Et hinc est quod jubent ut nullum inter datas & quæsitas quantitates habeatur discrimen. Nam cum eadem computatio cuique casui datorum & quæsitorum competat, convenit ut sine discrimine concipiantur & conferantur quo rectius judicetur de modis computandi: Vel potius convenit ut fingas quæstionem de ejusmodi datis & quæsitis propositam esse per quas arbitreris te posse ad æquationem facillime pervenire.

Proposita

Proposito igitur aliquo Problemate, quantitates quas involvit confer, & nullo inter datas & quæsitas habito discrimine, perpende quomodo aliæ ex aliis dependeant ut cognoscas quænam si assumantur, synthetice gradiendo, dabunt cæteras. Ad quod faciendum non opus est ut prima fronte de modo cogites quo aliæ ex aliis per calculum Algebraicum deduci possint, sed sufficit animadversio generalis quod possint directo nexu quomodocunque deduci. Verbi gratia; si quæstio sit de circuli diametro AD tribusque lineis AB, BC, & CD in semicirculo inscriptis, & ex reliquis datis quæratur BC; primo intuitu manifestum est diametrum AD determinare semicirculum, dein lineas AB & CD per inscriptionem determinare puncta B & C atque adeo quæsitum BC, idque nexu maxime directo; & quo pacto tamen BC ex his datis per Analysin eruatur non ita manifestum est. Hoc idem quoque de AB vel CD si ex reliquis datis quærerentur, intelligendum est. Quod si AD ex datis AB, BC & CD quæreretur, æque patet id non fieri posse Synthetice; siquidem punctorum A ac D distantia dependet ex angulis B & C, & illi anguli ex circulo cui datæ lineæ sunt inscribendæ, & ille circulus non datur ignota AD diametro. Rei igitur natura postulat ut AD non Synthetice sed ex ejus assumptione quæratur ut ad data fiat regressus.



Cum varios ordines quibus termini quæstionis sic evolvi possint perspexeris, *E syntheticis quoslibet adhibe, assumendo lineas tanquam datas à quibus ad alias facillimus videtur progressus & ad ipsas vicissim difficillimus.* Nam computatio ut per varia media possit incedere, tamen ab istis lineis initium sumet;

ac promptius perficietur fingendo quæstionem ejusmodi esse ac si de istis datis & quæsito aliquo ab istis facillime prodituro institueretur, quam de quæstione prout revera proponitur cogitando. Sic in exemplo jam allato si ex reliquis datis quæritur A D; cum id sythetice fieri non posse percipiam, sed ab ipso tamen, si modo daretur, discursum ad alia directo nexu incedere, assumo A D tanquam datum & abinde computationem non secus incipio quam si revera daretur & aliqua ex datis A B, B C & C D quæreretur. Atque hac methodo computationem ab assumptis ad cæteras quantitates eo more promovendo quo linearum relationes dirigunt, æquatio tandem inter duos ejusdem alicujus quantitatis valores semper obtinebitur, sive ex valoribus unus sit litera sub initio operis quantitati pro nomine imposita, & alter per computationem inventus, sive uterque per computationem diversimode institutam inveniatur.

Cæterum ubi terminos quæstionis sic in genere comparaveris, plus artis & inventionis in eo requiritur ut advertas particulares istos nexus sive linearum relationes quæ computationi accommodantur. Nam quæ laxius perpendenti videantur immediate & relatione proxima connecti, cum illam relationem algebraice designare volumus, circuitum plerumque quoad constructiones Schematum de novo moliendas & computationem per gradus promovendam exigunt: Quemadmodum de B C ex A D, A B & C D colligendo constare potest. Per ejusmodi enim propositiones vel enunciationes solummodo gradiendum est quæ aptæ sunt ut terminis algebraicis designentur, quales præsertim ab Axiom. 19, Prop. 4. lib. 6, & Prop. 47. lib. 1. Elem. proveniunt.

Imprimis itaque promovetur calculus per additionem vel subductionem linearum eo ut ex valoribus

bus partium obtineatur valor totius, vel ex valoribus totius & unius partis obtineatur valor alterius.

Secundo promovetur ex linearum proportionalitate: ponimus enim (ut ſupra) factum à mediis terminis diviſum per alterutrum extremorum eſſe valorem alterius. Vel quod perinde eſt, ſi valores omnium quatuor proportionalium prius habeantur, ponimus æqualitatem inter factos extremorum & factos mediorum. Linearum vero proportionalitas ex triangulorum ſimilitudine maxime ſe prodit, quæ cum ex æqualitate angulorum dignoſcatur, in iis comparandis Analyſta debet eſſe perſpicax, atque adeo non ignorabit Prop. 5, 13, 15, 29, & 32. lib. 1. Prop. 4, 5, 6, 7, & 8. lib. 6. Et Prop. 20, 21, 22, 27 ac 31. lib. 3. Elementorum. Quibus etiam referri poteſt Prop. 3. lib. 6, ubi ex proportionalitate linearum colligitur angulorum æqualitas & contra. Atque idem aliquando præſtant Prop. 35 & 36. lib. 3.

Tertio promovetur per additionem vel ſubductionem quadratorum. In triangulis nempe rectangulis addimus quadrata minorum laterum ut obtineatur quadratum maximi, vel à quadrato maximi lateris ſubducimus quadratum unius è minoribus ut obtineatur quadratum alterius.

Atque his paucis fundamentis (ſi adnumeretur Prop. 1. lib. 6. Elem. cum de ſuperficiebus agitur, ut & aliquæ propoſitiones ex lib. 11 & 12. deſumptæ cum agitur de ſolidis,) tota Ars Analytica quoad Geometriam rectilineam innititur. Quin etiam ad ſolas linearum ex partibus compoſitiones & ſimilitudines triangulorum poſſunt omnes Problematum difficultates reduci; adeo ut non opus ſit alia Theoremata adhibere: quippe quæ omnia in hæc duo reſolvi poſſunt, & proinde ſolutiones etiam quæ ex iſtis depromuntur. Inque hujus rei

instantiam subjunxi Problema de perpendiculo in basem obliquanguli trianguli demittendo sine adjumento Prop. 47. lib. 1 solutum. Etsi vero juvet simplicissima principia à quibus problematum solutiones dependent non ignorasse, & istis solis adhibitis posse quælibet solvere; expeditionis tamen gratia convenit ut non solum Prop. 47. lib. 1. Elem. cujus usus est frequentissimus; sed & alia etiam *Theoremata* nonnunquam adhibeantur.

Quemadmodum si perpendiculo in basem obliquanguli trianguli demisso, de segmentis basis ad calculum promovendum agatur; ex usu erit scire quod, Differentia quadratorum è lateribus æquetur duplo rectangulo sub basi & distantia perpendiculi à medio basis.

Si trianguli alicujus verticalis angulus bisecetur, computationi non solum inserviet quod basis secetur in ratione laterum, sed etiam quod differentia factorum à lateribus & à segmentis basis æquetur quadrato lineæ bisecantis angulum.

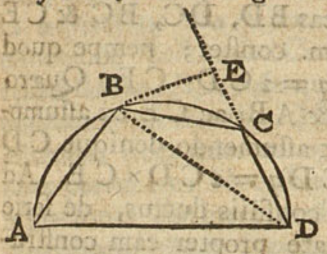
Si de figuris in circulo inscriptis res est, Theorema non raro subveniet quod Inscripti cujuslibet quadrilateri factus à diagoniis æquetur summæ factorum à lateribus oppositis.

Et hujusmodi plura inter exercendum observet Analysta, & in penum forte reservet; sed parcius utatur si pari facilitate aut non multo difficilius possit solutionem è simplicioribus computandi principiis extruere. Quamobrem ad tria primo proposita tanquam notiora, simpliciora, magis generalia, pauca, & omnibus tamen sufficientia animum præsertim advertat, & omnes difficultates ad ea præcæteris reducere conetur.

Sed ut hujusmodi Theoremata ad solvenda Problemata accommodari possint, *Schemata* plerumque sunt ultra *construenda*, idque sæpissime producendo aliquas ex lineis donec secent alias, aut sint assignatæ

natæ

natæ longitudinis; vel ab insigniori quolibet puncto ducendo lineas aliis parallelas aut perpendiculares, vel insigniora puncta conjungendo, ut & aliter nonnunquam construendo, prout exigunt status Problematis, & Theoremata quæ ad ejus solutionem adhibentur. Quemadmodum si duæ non concurrentes lineæ datos angulos cum tertia quadam efficiant, producimus forte ut concurrentes constituant triangulum cujus anguli & proinde laterum rationes dantur. Vel si quilibet angulus detur, aut sit alicui æqualis, in triangulum sæpe complemus specie datum, aut alicui simile, idque vel producendo aliquas ex lineis in schemate vel subtensam aliter ducendo. Si triangulum sit obliquangulum, in duo rectangula sæpe resolvimus, demittendo perpendiculum. Si de figuris multilateris agatur, resolvimus in triangula, ducendo lineas diagonales: Et sic in cæteris; ad hanc metam semper collimando *ut schema in triangula vel data, vel similia, vel rectangula resolvatur.* Sic in exemplo proposito duco diagonium BD, ut Trapezium ABCD in duo triangula, ABD rectangulum, & BDC obliquangulum resolvatur. Deinde resolvo triangulum obliquangulum in duo rectangula demittendo perpendiculum à quolibet ejus angulo B, C, vel D in latus oppositum: quemadmodum à B in CD productam ad E ut huic perpendiculo BE occurrat. Interea vero cum anguli BAD & BCD duos rectos (per 22. 3. Elem.) perinde ac BCE & BCD constituant; percipio angulos BAD & BCE æquales esse, adeoque triangula BCE ac DAB similia. Atque ita video computationem (assumendo AD, AB & BC tanquam



quam si C D quæreretur) ad hunc modum institui posse, viz. A D & A B (propter tri. A B D rect.) dant B D. A D, A B, B D & B C (propter sim. tri. A B D & C E B) dant B E & C E. B D & B E propter triang. B E D rect.) dant E D; & E D — E C dat C D. Unde obtinebitur æquatio inter valorem de C D sic inventum & literam pro ea suffectam. Possumus etiam (& maximam partem satius est quam opus in serie continuata nimis prosequi,) à diversis principiis computationem incipere, aut saltem diversis modis ad eandem quamlibet conclusionem promovere, ut duo tandem obtineantur ejusdem cujusvis quantitatis valores qui æquales ponantur. Sic A D, A B & B C dant B D, B E & C E ut prius; deinde C D + C E dat E D; ac denique B D & E D (propter triang. rect. B E D) dant B E. Potest etiam computatio hac lege optime institui ut valores quantitatum investigentur quibus alia quæpiam relatio cognita intercedit, & illa deinde relatio æquationem dabit. Sic cum relatio inter lineas B D, D C, B C & C E ex Prop. 12. lib. 2. Elem. constet; nempe quod sit $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$: Quæro BDq ex assumptis A D & A B; ac C E ex assumptis A D, A B & B C. Et assumendo denique C D facio $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$. Ad hos modos & hujusmodi consiliis ductus, de serie Analyseos, deque schemate propter eam construendo semper debes una prospicere.

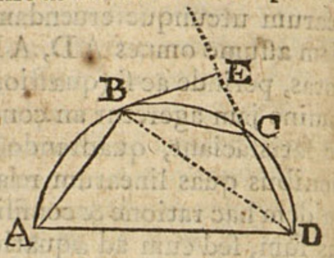
Ex his credo manifestum est quid sibi velint Geometræ cum jubent putes factum esse quod quæris. Nullo enim inter cognitas & incognitas quantitates habito discrimine, quaslibet ad ineundum calculum assumere potes quasi omnes ex prævia solutione fuissent notæ, & non amplius de solutione Problematis, sed de probatione solutionis ageretur. Sic in primo ex tribus jam descriptis computandi modis,

modis, etsi forte AD revera quæratur, fingo tamen CD quærendum esse, quasi vellem probare an valor ejus ab AD derivatus quadret cum ejus quantitate prius cognita. Sic etiam in duobus posterioribus modis pro meta non propono quantitatem aliquam quærendam esse, sed æquationem è relationibus linearum utcunque eruendam: Et in ejus rei gratiam assumo omnes AD, AB, BC, & CD tanquam notas, perinde ac si (quæstione prius soluta) de tentamine jam ageretur an conditionibus ejus hæ probe satisfaciant, quadrando cum quibuslibet æquationibus quas linearum relationes produnt. Opus quidem hac ratione & consiliis prima fronte aggressus sum, sed cum ad æquationem deventum est sententiam muto, & quantitatem desideratam per istius æquationis reductionem & solutionem quæro. Sic denique plures quantitates tanquam cognitas sæpenumero assumimus quam in statu quæstionis exprimuntur. Hujusque rei insignem in 55° sequentium problematum instantiam videre est, ubi a, b & c in æquatione $aa + bx + cxx = yy$, pro determinatione Sectionis Conicæ assumpsi, ut & alias etiam lineas r, s, t, v de quibus Problema prout proponitur nihil innuit. Nam quaslibet quantitates assumere licet quarum ope possibile sit ad æquationes pervenire: Hoc solum cavendo ut ex illis tot æquationes obtineri possint quot assumptæ sunt quantitates revera incognitæ.

Postquam de computandi methodo constat & ornatur schema, quantitatibus quæ computationem ingredientur (hoc est ex quibus assumptis aliarum valores derivandi sunt, donec tandem ad æquationem perveniatur) nomina impone, delegendo quæ problematis omnes conditiones involvunt, & operi præ cæteris accommodatæ videntur, & conclusionem (quantum possis conjicere) simpliciorem reddent, sed non plures tamen quam proposito sufficiunt. Itaque pro quantitatibus quæ ex aliarum

voca-

vocabulis facile deduci possint, propria vocabula vix tribuas. Sic ex tota linea & ejus partibus, ex tribus lateribus trianguli rectanguli, & ex tribus vel quatuor proportionalibus unum aliquod minimum sine nomine permittere solemus, eo quod valor ejus è reliquorum nominibus facile derivari possit. Quemadmodum in exemplo jam allato si dicam $AD = x$ & $AB = a$ ipsum BD nulla litera designo quod sit tertium latus trianguli rectanguli ABD & proinde valeat $\sqrt{xx - aa}$.



Dein si dicam $BC = b$, cum triangula DAB & BCE sint similia & inde lineæ $AD.\ AB :: BC.\ CE$ proportionales, quarum tribus AD, AB, & BC imposita sunt nomina; ea propter quartam CE sine nomine permitto, & ejus vice valorem $\frac{ab}{x}$ ex hac proportionalitate detectum usurpo. Atque ita si DC vocetur c, ipsi DE nomen non assigno quod ex partibus ejus DC & CE, sive c & $\frac{ab}{x}$, valor $c + \frac{ab}{x}$ prodeat.

Cæterum dum de his moneo, Problema ad æquationem pene redactum est. Nam postquam literæ pro speciebus principalium linearum præscriptæ sunt, nihil aliud agendum restat quam ut ex istis speciebus valores aliarum linearum juxta methodum præconceptam eruantur, donec modo quovis proviso in æquationem coeant. Et in hoc casu nihil restare video nisi ut per triangula rectangula BCE & BDE dupliciter eliciam BE. Nempe est

BC*q*

$BCq - CEq$ (five $bb - \frac{aabb}{xx}$) $= BEq$, ut & $BDq - DEq$ (five $xx - aa - cc - \frac{2abc}{x} - \frac{aabb}{xx}$) $= BEq$. Et hinc (utrobique deleto $\frac{aabb}{xx}$) æquationem habebo $bb = xx - aa - cc - \frac{2abc}{x}$:

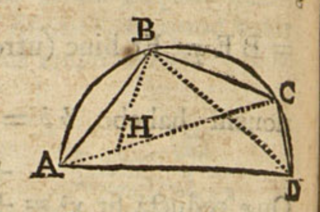
Quæ reducta fit $x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix} x + 2abc.$

Cum vero de solutione Problematis hujus plures modos etsi non multum dissimiles in præcedentibus recensuerim quorum iste de Prop. 12. Lib. 2. Elem. desumptus sit cæteris quodammodo concinnior; eundem placet etiam subjungere. Sit itaque $AD = x$, $AB = a$, $BC = b$, & $CD = c$, eritque $BDq = xx - aa$, & $CE = \frac{ab}{x}$ ut prius. Hisce dein speciebus in Theorema $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$ substitutis orietur $xx - aa - bb - cc = \frac{2abc}{x}$; & facta reductione $x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix} x + 2abc.$ Ut ante.

Sed ut pateat quanta sit in solutionum inventione varietas, & proinde quod in eas incidere prudenti Geometræ non sit admodum difficile: Visum fuit plures adhuc modos hoc idem perficiendi docere. Atque equidem ducto Diagonio BD si vice perpendiculi BE à puncto B in latus DC supra demissi demittatur perpendiculum à puncto D in latus BC vel à puncto C in latus BD, quo obliquangulum triangulum BCD in duo rectangula utcunque

que resolvatur, iisdem ferme quas jam descripsi methodis ad æquationem pervenire licet. Sunt & alii modi ab istis satis differentes.

Quemadmodum si diagonii duo AC & BD ducantur, dabitur BD ex assumptis AD & AB; ut & AC ex assumptis AD & CD, deinde per notum Theorema de figuris quadrilateris in circulo inscriptis, nempe



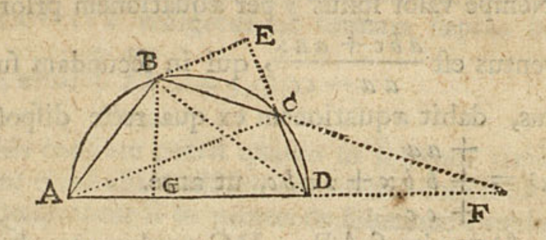
quod sit $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$ obtinebitur æquatio. Stantibus itaque linearum AD, AB, BC, CD vocabulis x, a, b, c; erit $BD = \sqrt{xx - aa}$ & $AC = \sqrt{xx - cc}$ per 47. 1. Elem. Et his linearum speciebus in Theorema jam recensitum substitutis, exibit $xb + ac = \sqrt{xx - cc} \times \sqrt{xx - aa}$. Cujus æquationis partibus denique quadratis & reductis obtinebitur iterum

$$x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix}\, x + 2abc.$$

Cæterum ut pateat etiam quo pacto solutiones ex isto Theoremate petitæ possint inde ad solas triangulorum similitudines redigi; erigatur BH ipsi BC perpendicularis & occurrens AC in H, & fient triangula BCH, BDA similia, propter angulos ad B rectos, & ad C ac D (per 21. 3. Elem.) æquales; ut & triangula BCD, BHA similia, propter æquales angulos tum ad B (ut pateat demendo communem angulum DBH à duobus rectis,) tum ad D ac A (per 21. 3. Elem.) Videre est itaque quod ex proportionalitate BD. AD :: BC. HC detur HC; ut & AH ex proportionalitate BD. CD :: AB. AH. Unde cum sit $AH + HC = AC$, habebitur

bitur æquatio. Stantibus ergo præfatis linearum vocabulis x, a, b, c, nec non ipsarum AC & BD valoribus $\sqrt{xx-cc}$ & $\sqrt{xx-aa}$; prima proportionalitas dabit $HC = \frac{bx}{\sqrt{xx-aa}}$, & secunda dabit $AH = \frac{ac}{\sqrt{xx-aa}}$. Unde propter $AH + HC = AC$ erit $\frac{bx+ac}{\sqrt{xx-aa}} = \sqrt{xx-cc}$; æquatio quæ (multiplicando per $\sqrt{xx-aa}$ & quadrando) reducetur ad formam in præcedentibus sæpius descriptam.

Adhæc ut magis pateat quanta sit solvendi copia; producantur BC & AD donec conveniant in F, & fient triangula ABF & CDF similia, quippe



quorum angulus ad F communis est, & anguli ABF & CDF (dum complent ang. CDA ad duos rectos per 13. 1 & 22. 3. Elem.) æquales. Quamobrem si præter quatuor terminos de quibus instituitur quæstio, daretur AF, proportio AB. AF : : CD. CF daret CF. Item AF — AD daret DF, & proportio CD. DF : : AB BF daret BF; unde (cum sit BF — CF = BC) emergeret æquatio. Sed cum duæ quantitates incognitæ AD ac DF tanquam datæ assumantur, restat alia æquatio invenienda. Demitto ergo BG in AF ad rectos angulos

gulos, & proportio A D. A B : : A B. A G. dabit A G; quo habito, Theorema è 13. 2. Elem. petitum, nempe quod sit $BFq + 2FAG = ABq + AFq$, dabit æquationem alteram. Stantibus ergo a, b, c, x ut prius, & dicto $AF = y$: erit (insistendo vestigiis Theoriæ jam excogitatæ) $\frac{cy}{a} = CF$. $y - x = DF$. $\frac{\overline{y-x} \times a}{c} = BF$. Indeque $\frac{\overline{y-x} \times a}{c} - \frac{cy}{a} = b$, æquatio prima. Erit etiam $\frac{aa}{x} = AG$, adeoque $\frac{aayy - 2aaxy + aaxx}{cc} + \frac{2aay}{x} = aa + yy$, æquatio secunda. Quæ duæ per reductionem dabunt æquationem desideratam. Nempe valor ipsius y per æquationem priorem inventus est $\frac{abc + aax}{aa - cc}$, qui in secundam substitutus, dabit æquationem ex qua recte disposita fiet

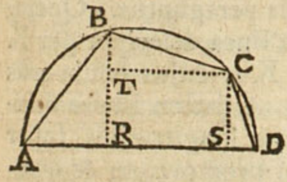
$$x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix} x + 2abc, \text{ ut ante.}$$

Atque ita si A B ac D C producantur donec sibi mutuo occurrant, solutio haud aliter se habebit, nisi forte futura sit paulo facilior. Quare aliud hujus rei specimen è fonte multum dissimili petitum potius subjungam, quærendo nempe aream quadrilateri propositi, idque dupliciter. Duco igitur diagonium B D ut in duo triangula quadrilaterum resolvatur. Dein usurpatis linearum vocabulis x, a, b, c ut ante, invenio $BD = \sqrt{xx - aa}$ indeque $\frac{1}{2}a\sqrt{xx - aa}$ $(= \frac{1}{2} AB \times BD)$ aream trianguli A B D. Porro demisso B E perpendiculariter in

in CD, (erit propter ſimilia triangula ABD, BCE) AD. BD :: BC. BE, & proinde $BE = \frac{b}{x}\sqrt{xx-aa}$. Quare etiam $\frac{bc}{2x}\sqrt{xx-aa}$ ($= \frac{1}{2} CD \times BE$) erit area trianguli BCD. Haſce jam areas addendo orietur $\frac{ax+bc}{2x}\sqrt{xx-aa}$ area totius quadrilateri. Non ſecus ducendo diagonium AC & quærendo areas triangulorum ACD & ACB, eaſque addendo, rurſus obtinebitur area quadrilateri $\frac{cx+ba}{2x}\sqrt{xx-cc}$. Quare ponendo haſce areas æquales & utraſque multiplicando per $2x$, habebitur $\overline{ax+bc}\sqrt{xx-aa} = \overline{cx+ba} \times \sqrt{xx-cc}$, æquatio quæ quadrando ac dividendo per $aax - ccx$ redigetur ad formam ſæpius inventam

$$x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix}\, x + 2abc.$$

Ex his conſtare poteſt quanta ſit ſolvendi copia & obiter quod alii modi ſint aliis multo concinniores. Quapropter ſi in primas de ſolutione Problematis alicujus cogitationes modus computationi male accommodatus inciderit, relationes linearum iterum evolvendæ ſunt donec modum quam poteris idoneum & elegantem machinatus fueris. Nam quæ leviori curæ ſe offerunt laborem ſatis moleſtum plerumque parient ſi ad opus adhibeantur. Sic in Problemate de quo agitur nil difficilius foret in ſequentem modum quam in aliquem è præcedentibus incidere. Demiſſis nempe BR & CS ad AD nor-



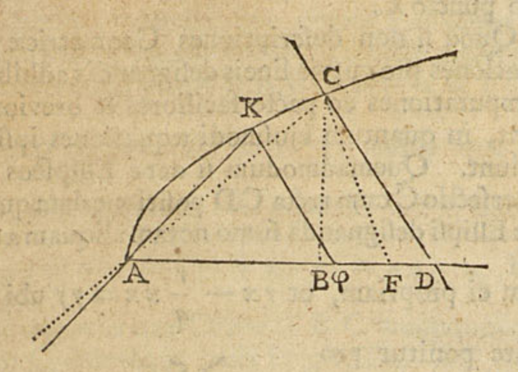
malibus, ut & C T ad B R, figura resolvetur in triangula rectangula. Et videre est quod A D & A B dant A R, A D & C D dant S D, A D — AR — S D dat R S vel T C. Item A B & A R dant B R, C D & S D dant C S vel T R, & B R — T R dat B T. Denique B T ac T C dant B C, unde obtinebitur æquatio. Siquis autem hoc modo computationem aggressus fuerit, is in terminos Algebraicos profusiores quam sunt ulli præcedentium incidet & ad finalem æquationem ægrius reducibiles.

Et hæc de solutione problematum in rectilinea Geometria; nisi forte operæ pretium fuerit annotasse præterea quod cum anguli sive positiones linearum per angulos expressæ statum quæstionis ingrediuntur, angulorum vice debent adhiberi lineæ aut linearum proportiones, tales nempe quæ ab angulis datis possunt per calculum Trigonometricum derivari; aut à quibus inventis anguli quæsiti per eundem calculum prodeunt; hoc est quæ se mutuo determinant: cujus rei plures instantias videre est in sequentibus.

Quod ad Geometriam circa lineas curvas attinet, illæ designari solent vel describendo eas per motum localem rectarum, vel adhibendo æquationes indefinite exprimentes relationem rectarum certa aliqua lege dispositarum & ad curvas desinentium. Idem fecerunt Veteres per sectiones Solidorum, sed minus commode. Computationes vero quæ curvas primo modo descriptas respiciunt haud secus quam in præcedentibus peraguntur. Quemadmodum si A K C sit curva linea descripta per K verticale punctum normæ A K φ, cujus unum crus A K per punctum A positione datum libere dilabitur, dum alterum K φ datæ longitudinis super rectam A D positione datam promovetur, & quæratur punctum C in quo recta quævis C D positione

one

one data hanc curvam ſecabit; duco rectas A C F quæ normam in poſitione quæſita referant, & rela-



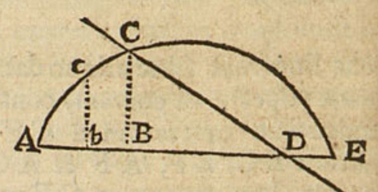
tione linearum (ſine aliquo dati & quæſiti diſcrimine aut reſpectu ad curvam) conſiderata, percipio dependentiam cæterarum à C F & qualibet harum quatuor B C, B F, A F & A C Syntheticam eſſe; quarum duas itaque ut $CF = a$ & $CB = x$ aſſumo, & inde computum ordiendo ſtatim lucratus ſum $BF = \sqrt{aa - xx}$ & $AB = \frac{xx}{\sqrt{aa-xx}}$ propter ang. rectum C B F, lineaſque B F. B C : : B C. A B continue proportionales. Porro ex data poſitione C D datur A D quam itaque dico b, datur etiam ratio B C ad B D quam pono d ad e & fit $BD = \frac{ex}{d}$ & $AB = b - \frac{ex}{d}$. Eſt ergo $b - \frac{ex}{d} = \frac{xx}{\sqrt{aa-xx}}$, æquatio quæ (quadrando partes & multiplicando per $aa - xx$ &c.) reducetur ad hanc formam

$$x^4 = \frac{2bdex^3 \begin{matrix} -bbdd \\ +aaee \end{matrix} xx - 2aabdex + aabbdd}{dd + ee};$$

 unde

unde demum è datis a, b, d, & e erui debet x per regulas post tradendas, & intervallo isto x sive BC acta ipsi AD parallela recta secabit CD in quæsito puncto C.

Quod si non descriptiones Geometricæ sed æquationes pro curvis lineis designandis adhibeantur, computationes eo pacto faciliores & breviores evadent, in quantum ejusmodi æquationes ipsis lucro cedunt. Quemadmodum si datæ Ellipseos ACE intersectio C cum recta CD positione data quæratur; pro Ellipsi designanda sumo notam aliquam æquationem ei propriam, ut $rx - \frac{r}{q}xx = yy$ ubi x indefinite ponitur pro qualibet axis parte Ab vel AB, & y pro perpendiculo bc vel BC ad curvam terminato;



r vero & q dantur ex datâ specie Ellipsis. Cum itaque CD positione detur, dabitur & AD, quam dico a; & erit BD $a - x$, dabitur etiam angulus ADC & inde ratio BD ad BC quam dic 1 ad e, & erit BC $(y) = ea - ex$, cujus quadratum $eeaa - 2eeax + eexx$ æquabitur $rx - \frac{r}{q}xx$. Indeque per reductionem orietur $xx = \frac{2aeex + rx - aaee}{ee + \frac{r}{q}}$, seu

$$x = \frac{aee + \frac{1}{2}r \pm e\sqrt{ar + \frac{rr}{4ee} - \frac{aar}{q}}}{ee + \frac{r}{q}}.$$

Quin-

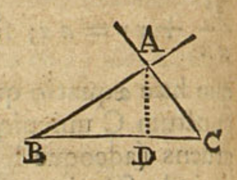
Quinetiam etsi Curva per descriptionem Geometricam vel per sectionem solidi designetur, potest tamen inde æquatio obtineri quæ naturam Curvæ definiet, adeoque huc omnes Problematum quæ circa eam proponuntur difficultates reduci.

Sic in exemplo priori si A B dicatur x & B C y, tertia proportionalis B F erit $\frac{yy}{x}$, cujus quadratum una cum quadrato B C æquatur C F q, hoc est $\frac{y^4}{xx} + yy = aa$; sive $y^4 + xxyy = aaxx$. Estque hæc æquatio qua Curvæ A K C unumquodque punctum C unicuique basis longitudini A B congruens (adeoque ipsa Curva) definitur, & è qua proinde solutiones Problematum quæ de hac curva proponuntur petere liceat.

Ad eundem fere modum cum curva non datur specie sed determinanda proponitur, possis pro arbitrio æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat; & hanc pro ea designanda tanquam si daretur assumere, ut ex ejus assumptione quomodocunque perveniatur ad æquationes ex quibus assumpta tandem determinentur: Cujus rei exempla habes in nonnullis sequentium problematum quæ in pleniorem illustrationem hujus doctrinæ & exercitium discentium congessi, quæque jam pergo tradere.

PROB. I.

Data recta terminata BC a cujus extremitatibus duæ rectæ BA, CA ducuntur in datis angulis ABC, ACB: Invenire AD altitudinem concursus A supra datam BC.

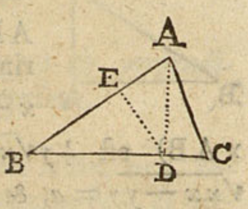


SIT BC $= a$, & AD $= y$; & cum angulus ABD detur, dabitur (ex tabula ſinuum vel tangentium) ratio inter lineas AD & BD quam pone ut d ad e. Eſt ergo $d . e :: $ AD (y). BD Quare BD $= \frac{ey}{d}$. Similiter propter datum angulum ACD dabitur ratio inter AD ac DC quam pone ut d ad f & erit DC $= \frac{fy}{d}$. At BD + DC = BC, hoc eſt $\frac{ey}{d} + \frac{fy}{d} = a$. Quæ reducta multiplicando utramque partem æquationis per d, ac dividendo per $e + f$ evadit $y = \frac{ad}{e+f}$.

PROB.

PROB. II.

Cujuslibet Trianguli ABC datis lateribus AB, AC, & Basi BC quam perpendiculum AD ab angulo verticali secat in D: Invenire segmenta BD ac DC.



SIT AB $= a$, AC $= b$, BC $= c$, & BD $= x$, eritque DC $= c - x$. Jam cum ABq − BDq $(aa - xx)$ = ADq; & ACq − DCq $(bb - cc + 2cx - xx)$ = ADq: Erit $aa - xx = bb - cc + 2cx - xx$; quæ per reductionem fit $\frac{aa - bb + cc}{2c} = x$.

Cæterum ut pateat omnes omnium Problematum difficultates per solam linearum proportionalitatem sine adminiculo Prop. 47. primi Elementorum, licet non absque circuitu, enodari posse; placuit sequentem hujus solutionem ex abundanti subjungere. A puncto D in latus AB demitte DE normalem, & stantibus jam positis linearum nominibus, erit AB. BD : : BD. BE.

$a. x :: x. \frac{xx}{a}$. Et BA − BE $(a - \frac{xx}{a})$ = EA. Nec non EA. AD : : AD. AB adeoque EA × AB $(aa - xx)$ = ADq. Et sic ratiocinando circa triangulum ACD invenietur iterum AD$q = bb - cc + 2cx - xx$. Unde obtinebitur ut ante $x = \frac{aa - bb + cc}{2c}$.

PROB. III.

Trianguli rectanguli ABC perimetro & area datis invenire hypotenusam BC.

ESTO perimeter a, area bb, $BC = x$, & $AC = y$; eritque $AB = \sqrt{xx - yy}$; unde rursus perimeter ($BC + AC + AB$) est $x + y + \sqrt{xx - yy}$, & area ($\frac{1}{2} AC \times AB$) est $\frac{1}{2} y \sqrt{xx - yy}$. Adeoque $x + y + \sqrt{xx - yy} = a$, & $\frac{1}{2} y \sqrt{xx - yy} = bb$.

Harum æquationum posterior dat $\sqrt{xx - yy} = \frac{2bb}{y}$ quare scribo $\frac{2bb}{y}$ pro $\sqrt{xx - yy}$ in æquatione priori ut assymmetria tollatur; & prodit $x + y + \frac{2bb}{y} = a$, sive multiplicando per y, & ordinando $yy = ay - xy - 2bb$. Porro ex partibus æquationis prioris aufero $x + y$ & restat $\sqrt{xx - yy} = a - x - y$, cujus partes quadrando ut assymmetria rursus tollatur, prodit $xx - yy = aa - 2ax - 2ay + xx + 2xy + yy$, quæ in ordinem redacta & per 2 divisa fit $yy = ay - xy + ax - \frac{1}{2} aa$. Deniqueponendo æqualitatem inter duos valores ipsius yy, habeo $ay - xy - 2bb = ay - xy + ax - \frac{1}{2} aa$, quæ reducta fit $\frac{1}{2} a - \frac{2bb}{a} = x$.

Idem aliter.

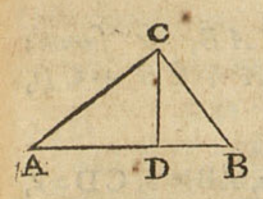
Esto $\frac{1}{2}$ perimeter $= a$, area $= bb$, & $BC = x$, eritque $AC + AB = 2a - x$. Jam cum sit xx

(BCq)

$(BCq) = ACq + ABq$, & $4bb = 2\,AC \times AB$, erit $xx + 4bb = ACq + ABq + 2\,AC \times AB =$ quadrato ex $AC + AB =$ quadrato ex $2a - x = 4aa - 4ax + xx$. Hoc est $xx + 4bb = 4aa - 4ax + xx$; quæ reducta fit $a - \frac{bb}{a} = x$.

PROB. IV.

Dato trianguli rectanguli perimetro & perpendiculo, invenire triangulum.



Trianguli ABC sit C rectus angulus & CD perpendiculum inde ad basem AB demissum. Detur $AB + BC + AC = a$, & $CD = b$. Pone basem $AB = x$, & erit laterum summa $a - x$. Pone laterum differentiam y, & erit majus latus $AC = \frac{a - x + y}{2}$; minus $BC = \frac{a - x - y}{2}$. Jam ex natura trianguli rectanguli est $ACq + BCq = ABq$, hoc est $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = xx$. Est & $AB.\ AC :: BC.\ DC$, adeoque $AB \times DC = AC \times BC$, hoc est $bx = \frac{aa - 2ax + xx - yy}{4}$. Per priorem æquationem est $yy = xx + 2ax - aa$. Per posteriorem $yy = xx - 2ax + aa - 4bx$. Adeoque $xx + 2ax - aa = xx - 2ax + aa - 4bx$. Et per reductionem $4ax + 4bx = 2aa$, sive $x = \frac{aa}{2a + 2b}$.

Geome-

Geometrice sic. In omni triangulo rectangulo, ut est summa perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita dimidium perimetri ad basem.

Aufer $2x$ de a, & restabit $\frac{ab}{a+b}$ excessus laterum super basem. Unde rursus, Ut in omni triangulo rectangulo, summa perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita perpendiculum ad excessum laterum super basem.

PROB. V.

Datis trianguli rectanguli basi AB, & summa perpendiculi & laterum $CA+CB+CD$, invenire triangulum.

Esto $CA+CB+CD=a$, $AB=b$, $CD=x$, & erit $AC+CB=a-x$. Pone $AC-CB=y$, & erit $AC=\frac{a-x+y}{2}$, & $CB=\frac{a-x-y}{2}$. Est autem $ACq+CBq=ABq$, hoc est $\frac{aa-2ax+xx+yy}{2}=bb$. Est & $AC\times CB=AB\times CD$, hoc est $\frac{aa-2ax+xx-yy}{4}=bx$. Quibus comparatis fit $2bb-aa+2ax-xx=yy=aa-2ax+xx-4bx$. Et per reductionem $xx=2ax+2bx-aa+bb$, & $x=a+b-\sqrt{2ab+2bb}$.

Geometrice sic. In omni triangulo rectangulo de summa perimetri & perpendiculi aufer mediam proportionalem inter eandem summam & duplum basis, & restabit perpendiculum.

Idem

Idem aliter.

Sit $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, & $AC = x$, & erit $BC = \sqrt{bb - xx}$, $CD = \frac{x\sqrt{bb-xx}}{b}$. Et $x + CB + CD = a$, five $CB + CD = a - x$, atque adeo $\frac{b+x}{b}\sqrt{bb-xx} = a - x$. Et quadratis partibus atque multiplicatis per bb, fiet $-x^4 - 2bx^3 + 2b^3x + b^4 = aabb - 2abbx + bbxx$. Qua æquatione per tranfpofitionem partium ad hunc modum ordinata $x^4 + 2bx^3 \begin{matrix}+3bb\\+2ab\end{matrix}xx \begin{matrix}+2b^3\\+2abb\end{matrix}x \begin{matrix}+b^4\\+2ab^3\\+aabb\end{matrix} = \begin{matrix}2bb\\+2ab\end{matrix}xx \begin{matrix}+4b^3\\+4abb\end{matrix}x \begin{matrix}+2b^4\\+2ab^3\end{matrix}$, & extracta utrobique radice, orietur $xx + bx + bb + ab = \overline{x+b}\sqrt{2ab+2bb}$. Et extracta iterum radice $x = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}ab} \pm \sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab}$.

Conftructio Geometrica.

A B F D E C F

Cape igitur $AB = \frac{1}{2}b$, $BC = \frac{1}{2}a$, $CD = \frac{1}{2}AB$, AE mediam proportionalem inter b & AC, & EF hinc inde mediam proportionalem inter b & DE, & erunt BF, BF duo latera trianguli.

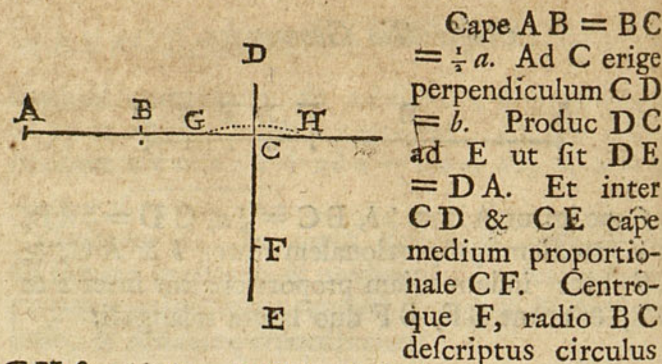
PROB.

PROB. VI.

Datis in triangulo rectangulo ABC summa laterum AC + BC, & perpendiculo CD invenire triangulum.

SIT AC+BC $= a$, CD $= b$, AC $= x$, & erit BC $= a - x$, AB $= \sqrt{aa - 2ax + 2xx}$. Est & CD. AC : : BC. AB. Ergo rursus AB $= \frac{ax - xx}{b}$. Quare $ax - xx = b\sqrt{aa - 2ax + 2xx}$, & partibus quadratis & ordinatis $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} + aa \\ - 2bb \end{matrix} xx + 2abbx - aabb = 0$. Adde ad utramque partem $aabb + b^4$, & fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} + aa \\ - 2bb \end{matrix} xx + 2abbx + b^4 = aabb + b^4$. Et extracta utrobique radice $xx - ax - bb = -b \times \sqrt{aa + bb}$, & radice iterum extracta $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb - b\sqrt{aa + bb}}$.

Constructio Geometrica.

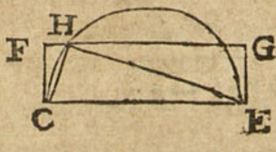


Cape AB $=$ BC $= \frac{1}{2}a$. Ad C erige perpendiculum CD $= b$. Produc DC ad E ut sit DE $=$ DA. Et inter CD & CE cape medium proportionale CF. Centroque F, radio BC descriptus circulus GH secet rectam BC in G & H, & erunt BG & BH latera duo trianguli.

Idem

Idem aliter.

Sit $AC + BC = a$, $AC - BC = y$, $AB = x$; ac $DC = b$, & erit $\frac{a+y}{2} = AC$, $\frac{a-y}{2} = BC$; $\frac{aa+yy}{2} = ACq + BCq = ABq = xx$. $\frac{aa-yy}{4b} = \frac{AC \times BC}{DC} = AB = x$. Ergo $2xx - aa = yy = aa - 4bx$, & $xx = aa - 2bx$, & extracta radice $x = -b + \sqrt{bb + aa}$. Unde in superiori constructione est CE Hypotenusa trianguli quæsiti.



Data autem basi & perpendiculo tam in hoc quam in superiore Problemate, triangulum sic expedite construitur. Fac parallelogrammum CG cujus latus CE erit basis trianguli, latus alterum CF perpendiculum. Et super CE describe semicirculum secantem latus oppositum FG in H. Age CH, EH, & erit CHE triangulum quæsitum.

PROB. VII.

In triangulo rectangulo, datis summa laterum, & summa perpendiculi & basis invenire Triangulum.

SIT laterum AC & BC summa a, basis AB & perpendiculi CD summa b, latus $AC = x$, basis $AB = y$, & erit $BC = a - x$, $CD = b - y$, $aa - 2ax + 2xx = ACq + BCq = ABq = yy$, $ax - xx = AC \times BC = AB \times CD = by - yy$ $= by - aa + 2ax - 2xx$, & $by = aa - ax + xx$.

$+xx$. Hujus quadratum $a^4 - 2a^3x + 3aaxx - 2ax^3 + x^4$, pone æquale yy in bb, hoc est æquale $aabb - 2abbx + 2bbxx$. Et ordinata æquatione fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +3aa \\ -2bb \end{matrix} xx \begin{matrix} -2a^3 \\ +2abb \end{matrix} x \begin{matrix} +a^4 \\ -aabb \end{matrix} = 0$. Ad utramque partem æquationis adde $b^4 - aabb$, & fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +3aa \\ -2bb \end{matrix} xx \begin{matrix} -2a^3 \\ +2abb \end{matrix} x \begin{matrix} +a^4 \\ -2aabb \\ +b^4 \end{matrix} = b^4 - aabb$. Et extracta utrobique radice $xx - ax + aa - bb = -b\sqrt{bb - aa}$. & radice iterum extracta

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{bb - \tfrac{3}{4}aa - b\sqrt{bb - aa}}.$$

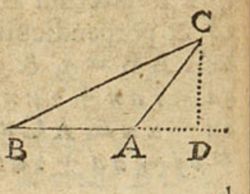
Constructio Geometrica.

Cape R mediam proportionalem inter $b+a$ & $b-a$, & S mediam proportionalem inter R & $b-$R, & T mediam proportionalem inter $\frac{1}{2}a+$S & $\frac{1}{2}a-$S, & erunt $\frac{1}{2}a+$T & $\frac{1}{2}a-$T, latera trianguli.

PROB. VIII.

Trianguli cujuscunque ABC, datis areâ, perimetro, & uno angulorum A, cætera determinare.

ESTO perimeter $= a$, & area $= bb$, & ab ignotorum angulorum alterutro C ad latus oppositum AB demitte perpendiculum CD; & propter angulum A datum, erit AC



ad

ad CD in data ratione, puta d ad e. Dic ergo AC $= x$ & erit CD $= \frac{ex}{d}$, per quam divide duplam aream, & prodibit $\frac{2bbd}{ex}$ = AB. Adde AD (nempe $\sqrt{ACq - CDq}$, sive $\frac{x}{d}\sqrt{dd-ee}$) & emerget BD $= \frac{2bbd}{ex} + \frac{x}{d}\sqrt{dd-ee}$; cujus quadrato adde CD$q$ & orietur $\frac{4b^4dd}{eexx} + xx + \frac{4bb}{e} \times \sqrt{dd-ee} =$ BCq. Adhæc à perimetro aufer AC & AB, & restabit $a - x - \frac{2bbd}{ex} =$ BC, cujus quadratum $aa - 2ax + xx - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e} + \frac{4b^4dd}{eexx}$ pone æquale quadrato prius invento; &, neglectis æquipollentibus, erit $\frac{4bb}{e}\sqrt{dd-ee} = aa - 2ax - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e}$. Et hæc, assumendo $4af$ pro datis terminis $aa + \frac{4bbd}{e} - \frac{4bb}{e} \times \sqrt{dd-ee}$, & reducendo, evadit $xx = 2fx - \frac{2bbd}{e}$, sive $x = f \pm \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$.

Eadem æquatio prodiisset etiam quærendo crus AB; nam crura AB & AC similiter se habent ad omnes conditiones problematis. Quare si AC ponatur $f - \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$ erit AB $= f + \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$,

&

& vicissim; atque horum summa $2f$ subducta de perimetro relinquit tertium latus BC $= a - 2f$.

PROB. IX.

Datis altitudine, basi, & summa laterum invenire triangulum.

SIT altitudo CD $= a$, basis AB dimidium $= b$, laterum semisumma $= c$, & semidifferentia $= z$; eritque majus latus, puta BC $= c + z$, & minus AC $= c - z$. Subduc CDq de BCq & ACq, & exibit hinc BD $= \sqrt{cc + 2cz + zz - aa}$, & inde AD $= \sqrt{cc - 2cz + zz - aa}$. Subduc etiam AB de BD & exibit iterum AD $= \sqrt{cc + 2cz + zz - aa} - 2b$. Quadratis jam valoribus AD & ordinatis terminis, orietur $bb + cz = b\sqrt{cc + 2cz + zz - aa}$. Rursusque quadrando & redigendo in ordinem obtinebitur $cczz - bbzz = bbcc - bbaa - b^4$. Et $z = b\sqrt{1 - \frac{aa}{cc - bb}}$. Unde dantur latera.

PROB. X.

Datis basi AB, summa laterum AC + BC, & angulo verticali C, determinare latera.

SIT basis $= a$, semissumma laterum $= b$, & semidifferentia $= x$, eritque majus latus BC $= b + x$ & minus AC $= b - x$. Ab alterutro ignotorum angulorum A ad latus oppositum BC demitte perpendiculum AD & propter angulum C datum dabitur ratio AC ad CD puta d ad e, & proinde erit CD $= \frac{eb - ex}{d}$.

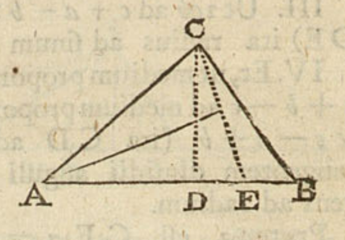
Est

Est etiam per 13.II.Elementorum $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC}$ hoc est $\frac{2bb + 2xx - aa}{2b + 2x} = CD$; adeoque habetur æquatio inter valores CD. Et hæc reducta fit $x = \sqrt{\frac{daa + 2ebb - 2dbb}{2d + 2e}}$. Unde dantur latera.

Si anguli ad basin quærerentur, conclusio foret concinnior; utpote ducatur EC datum angulum bisecans & basi occurrens in E; & erit AB. AC + BC (:: AE. AC) :: sin. ang. ACE. sin. ang. AEC. Et ab angulo AEC ejusque complemento BEC si subducatur dimidium anguli C relinquentur anguli ABC & BAC.

PROB. XI.

Datis Trianguli lateribus invenire angulos.



Dentur latera AB $= a$, AC $= b$, BC $= c$, quæratur angulus A. Demisso ad AB perpendiculo CD quod angulo isti opponitur, erit imprimis $bb - cc = ACq - BCq = ADq - BDq = \overline{AD + BD} \times \overline{AD - BD} = AB \times \overline{2AD - AB} = 2AD \times a - aa$. Adeoque $\frac{1}{2}a + \frac{bb - cc}{2a} = AD$. Unde prodit hocce *primum Theorema.*

I. Ut AB, ad AC + BC, ita AC − BC, ad quartam proportionalem N. $\frac{AB + N}{2} = AD$. Ut AC ad AD, ita radius ad Cosinum anguli A.

 Adhæc

Adhæc $DCq = ACq - ADq$

$$= \frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4}{4aa}$$

$$= \frac{\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c} \times \overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}}{4aa}$$

Unde multiplicatis numeratoris & denominatoris radicibus per b, conflatur hocce *Theorema secundum.*

II. Ut $2ab$ ad medium proportionale inter $\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c}$, & $\overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}$, ita radius ad sinum anguli A.

Insuper in AB Cape $AE = AC$, & Age CE, & erit angulus ECD æqualis dimidio anguli A. Aufer AD de AE, & restabit $DE = b - \frac{1}{2}a - \frac{bb-cc}{2a} = \frac{cc-aa+2ab-bb}{2a} = \frac{\overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}}{2a}$.

Unde $DEq = \frac{\overline{c+a-b} \times \overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b} \times \overline{c-a+b}}{4aa}$.

Et hinc consit *Theorema tertium quartumque, viz.*

III. Ut $2ab$ ad $\overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}$ (ita AC ad DE) ita radius ad sinum versum anguli A.

IV. Et, ut medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$ (ita CD ad DE) ita radius ad tangentem dimidii anguli A, vel dimidii cotangens ad radium.

Præterea est $CEq = CDq + DEq$

$$= \frac{2abb + bcc - baa - b^3}{a} = \frac{b}{a} \times \overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}.$$

Unde *Theorema quintum & sextum.*

V. Ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$, vel ut 1 ad medi. proportionale inter $\frac{c+a-b}{2a}$, & $\frac{c-a+b}{2b}$ (ita AC ad $\frac{1}{2}$CE vel CE ad DE) ita radius ad sinum dimidii anguli A.

VI.

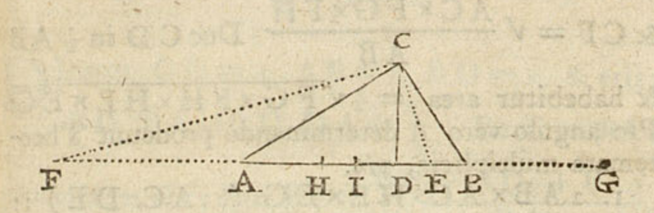
VI. Et ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ (ita CE ad CD) ita radius ad cosinum dimidii anguli A.

Si præter angulos desideretur etiam area trianguli, duc CDq in $\frac{1}{4}ABq$, & radix *viz.* $\frac{1}{4}\sqrt{\overline{a+b+c}\times\overline{a+b-c}\times\overline{a-b+c}\times\overline{-a+b+c}}$, erit area illa quæsita.

PROB. XII.

Trianguli cujusvis rectilinei datis lateribus & basi, invenire segmenta basis, perpendiculum, aream & angulos.

TRianguli ABC dentur latera AC, BC & basis AB. Biseca AB in I & in ea utrinque producta cape AF & AE æquales AC, atque BG &



BH æquales BC. Junge CE, CF; & à C ad basem demitte perpendiculum CD. Et erit $ACq-BCq$ $=ADq+CDq-CDq-BDq=ADq-BDq$ $=\overline{AD+BD}\times\overline{AD-BD}=AB\times 2DI$. Ergo $\frac{ACq-BCq}{2AB}=DI$. Et $2AB.\ AC+BC::AC-BC.\ DI$. Quod est Theorema pro determinandis segmentis basis.

De IE, hoc est de $AC-\frac{1}{2}AB$ aufer DI, &

 resta-

restabit $DE = \frac{BCq - ACq + 2AC \times AB - ABq}{2AB}$,

hoc est $= \frac{\overline{BC + AC - AB} \times \overline{BC - AC + AB}}{2AB}$,

sive $= \frac{HE \times EG}{2AB}$. Aufer DE de FE sive 2AC, & restabit $FD = \frac{ACq + 2AC \times AB + ABq - BCq}{2AB}$,

hoc est $= \frac{\overline{AC + AB + BC} \times \overline{AC + AB - BC}}{2AB}$,

sive $= \frac{FG \times FH}{2AB}$. Et cum sit CD medium proportionale inter DE ac DF, CE medium proportionale inter DE & EF, ac CF medium proportionale inter DF & EF: erit CD $= \frac{\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}}{2AB}$, $CE = \sqrt{\frac{AC \times HE \times EG}{AB}}$, & $CF = \sqrt{\frac{AC \times FG \times FH}{AB}}$. Duc CD in $\frac{1}{2}$ AB & habebitur area $= \frac{1}{4}\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$. Pro angulo vero A determinando prodeunt Theoremata multiplicia, *viz.*

1. $2AB \times AC : HE \times EG$ (:: AC. DE) :: radius ad sinum versum anguli A.

2. $2AB \times AC$. $FG \times FH$ (:: AC. FD) :: radius ad cosin. vers. A.

3. $2AB \times AC$. $\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$ (:: AC. CD) :: rad. ad sin. A.

4. $\sqrt{FG \times FH}$. $\sqrt{HE \times EG}$ (:: CF. CE) :: rad. ad tang. $\frac{1}{2}$ A.

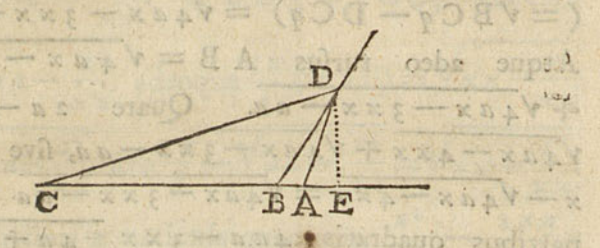
5. $\sqrt{HE \times EG}$. $\sqrt{FG \times FH}$ (:: CE. FC) :: rad. ad cotang. $\frac{1}{2}$ A.

6. $2\sqrt{AB \times AC}$. $\sqrt{HE \times EG}$ (:: FE. CE) :: rad. ad fin. $\frac{1}{2}$ A.

7. $2\sqrt{AB \times AC}$. $\sqrt{FG \times FH}$ (:: FE. FC) :: rad. ad cofin. $\frac{1}{2}$ A.

PROB. XIII.

Datum angulum CBD recta data CD subtendere; ita ut si à termino istius rectæ D ad punctum A in recta CB producta datum agatur AD, fuerit angulus ADC æqualis angulo ABD.



Dicatur $CD = a$, $AB = b$, $BD = x$, & erit BD. BA :: CD. $DA = \frac{ab}{x}$. Demitte perpendiculum DE, Erit $BE = \frac{BDq - ADq + BAq}{2BA}$ $= \frac{xx - \frac{aabb}{xx} + bb}{2b}$. Ob datum angulum DBA pone BD. BE :: b. e, & habebitur iterum $BE = \frac{ex}{b}$, ergo $xx - \frac{aabb}{xx} + bb = 2ex$. Et $x^4 - 2ex^3 + bbxx - aabb = 0$.

PROB. XIV.

Invenire Triangulum ABC cujus tria latera AB, AC, BC & perpendiculum DC, sunt in Arithmetica progressione.

Dic $AC = a$, $BC = x$; & erunt $DC = 2x - a$, & $AB = 2a - x$. Erunt etiam $AD (= \sqrt{ACq - DCq}) = \sqrt{4ax - 4xx}$ & $BD (= \sqrt{BCq - DCq}) = \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Atque adeo rursus $AB = \sqrt{4ax - 4xx} + \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Quare $2a - x = \sqrt{4ax - 4xx} + \sqrt{4ax - 3xx - aa}$, sive $2a - x - \sqrt{4ax - 4xx} = \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Et partibus quadratis $4aa - 3xx - 4a + 2xx\sqrt{4ax - 4xx} = 4ax - 3xx - aa$, sive $5aa - 4ax = \overline{4a - 2x}\sqrt{4ax - 4xx}$. Et partibus iterum quadratis ac terminis rite dispositis $16x^4 - 80ax^3 + 144aaxx - 104a^3x + 25a^4 = 0$. Hanc æquationem divide per $2x - a$, & orietur $8x^3 - 36axx + 54aax - 25a^3 = 0$, æquatio cujus resolutione dabitur x ex assumpto utcunque a. Habitis a & x constitue triangulum cujus latera erunt $2a - x$, a, & x; & perpendiculum in latus $2a - x$ demissum erit $2x - a$.

Si posuissem differentiam laterum trianguli esse d, & perpendiculum esse x; opus evasisset aliquanto concinnius, prodeunte tandem æquatione $x^3 = 24ddx + 48d^3$.

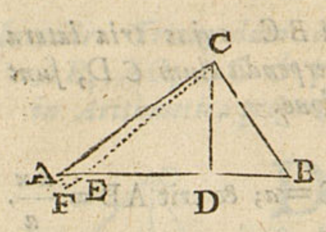
PROB.

PROB. XV.

Invenire Triangulum ABC cujus tria latera AB, AC, BC, & perpendiculum CD, sunt in Geometrica progressione.

Dic $AC = x$, & $BC = a$; & erit $AB = \frac{xx}{a}$. Et $CD = \frac{aa}{x}$. Eſt & AD $(= \sqrt{ACq - CDq})$ $= \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$; & BD $(= \sqrt{BCq - DCq})$ $= \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}$; adeoque $\frac{xx}{a}$ $(= AB) = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$ $+ \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}$, ſive $\frac{xx}{a} - \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}} = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$. Et partibus æquationis quadratis, $\frac{x^4}{aa} - \frac{2xx}{a} \times$ $\sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}} + aa - \frac{a^4}{xx} = xx - \frac{a^4}{xx}$, hoc eſt $x^4 - aaxx + a^4 = 2aax\sqrt{xx - aa}$. Et partibus iterum quadratis $x^8 - 2aax^6 + 3a^4x^4 - 2a^6xx$ $+ a^8 = 4a^4x^4 - 4a^6xx$. Hoc eſt $x^8 - 2aax^6$ $- a^4x^4 + 2a^6xx + a^8 = 0$. Divide hanc æquationem per $x^4 - aaxx - a^4$, & orietur $x^4 - aaxx$ $- a^4$. Quare eſt $x^4 = aaxx + a^4$. Et extracta radice $xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{5}{4}a^4}$, ſive $x = a\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$. Cape ergo a ſive BC cujuſvis longitudinis, & fac BC. AC : : AC. AB : : 1. $\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$; & trianguli ABC ex his lateribus conſtituti perpendiculum DC erit ad latus BC in eadem ratione.

Idem aliter.

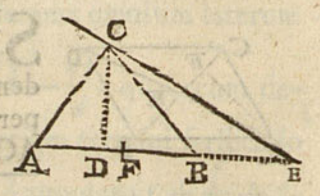


Cum sit AB. AC :: BC. DC dico angulum ACB rectum esse. Nam si negas age CE constituentem angulum ECB rectum. Sunt ergo triangula BCE, DBC similia per 8. VI. Elem. adeoque EB. EC :: BC. DC. hoc est EB. EC :: AB. AC. Age AF perpendicularem CE & propter parallelas AF, BC, erit EB. EC :: AE. FE :: AB. FC. Ergo per 9. V. Elem. est AC = FC, hoc est Hypotenusa trianguli rectanguli æqualis lateri contra 19. I. Elem. Non est ergo angulus ECB rectus, & proinde ipsum ACB rectum esse oportet. Est itaque $ACq + BCq = ABq$. Sed est $ACq = AB \times BC$, ergo $AB \times BC + BCq = ABq$, & extracta radice $AB = \frac{1}{2}BC + \sqrt{\frac{5}{4}BCq}$. Quamobrem cape BC. AB :: 1. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, & AC mediam proportionalem inter BC & AB, & triangulo ex his lateribus constituto, erunt AB. AC. BC. DC continue proportionales.

PROB.

PROB. XVI.

Super data basi AB triangulum ABC constituere, cujus vertex C erit ad rectum EC positione datam, basis autem medium existet Arithmeticum inter latera.



Basis AB bisecetur in F, & producatur donec rectæ EC positione datæ occurrat in E, & ad ipsam demittatur perpendicularis CD; dictisque $AB = a$, $FE = b$, & $BC - AB = x$, erit $BC = a + x$, $AC = a - x$. Et per 13. II. Elem. $BD \left(= \frac{BCq - ACq + ABq}{2AB}\right) = 2x + \frac{1}{2}a$. Adeoque $FD = 2x$, $DE = b + 2x$, & $CD \left(= \sqrt{CBq - BDq}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$. Sed propter datas positiones rectarum CE & AB, datur angulus CED; adeoque & ratio DE ad CD; quæ si ponatur d ad e dabit analogiam $d. e :: b + 2x. \sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$. Unde, multiplicatis extremis & mediis in se, oritur æquatio $eb + 2ex = d\sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$, cujus partibus quadratis & rite dispositis, fit $xx = \frac{\frac{3}{4}ddaa - eebb - 4eebx}{4ee + 3dd}$. Et radice extracta

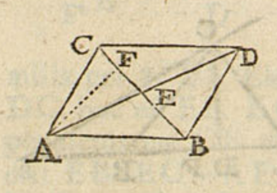
$$x = \frac{-2eeb + d\sqrt{3eeaa - 3eebb + \frac{9}{4}ddaa}}{4ee + 3dd}.$$

Dato autem x, datur $BC = a + x$ & $AC = a - x$.

PROB.

PROB. XVII.

Datis Parallelogrammi cujuscunque lateribus AB, BD, DC & AC, & una linea diagonali BC, invenire alteram diagonalem AD.

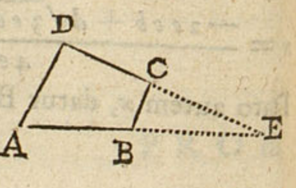


SIT E concursus diagonalium, & ad diagonalem BC demitte normalem AF, & per 13. II. Elementorum erit $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC} = CF$, atque etiam $\frac{ACq - AEq + ECq}{2EC} = CF$. Quare cum sit $EC = \frac{1}{2}BC$, & $AE = \frac{1}{2}AD$, erit $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC} = \frac{ACq - \frac{1}{4}ADq + \frac{1}{4}BCq}{BC}$, & facta reductione $AD = \sqrt{2ACq + 2ABq - BCq}$.

Unde obiter in quolibet parallelogrammo, summa quadratorum laterum æquatur summæ quadratorum diagonalium.

PROB. XVIII.

Datis Trapezii ABCD angulis, perimetro, & area, determinare latera.



LAtera duo quælibet AB ac DC produc donec concurrant in E, sitque $AB = x$ & $BC = y$ & propter angulos omnes datos dantur rationes BC

ad

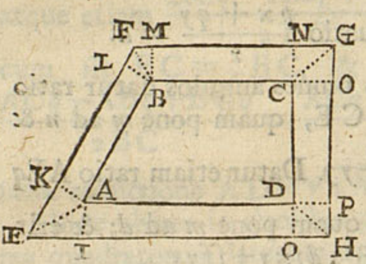
ad CE & BE; quas pone d ad e & f; & erit $CE = \frac{ey}{d}$ & $BE = \frac{fy}{d}$ adeoque $AE = x + \frac{fy}{d}$. Dantur etiam rationes AE ad AD ac DE; quas pone g & h ad d; & erit $AD = \frac{dx + fy}{g}$ & $ED = \frac{dx + fy}{h}$, adeoque $CD = \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}$, & ſumma omnium laterum $x + y + \frac{dx + fy}{g} + \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}$; quæ, cum detur, eſto a, & abbrevientur etiam termini ſcribendo $\frac{p}{r}$ pro dato $1 + \frac{d}{g} + \frac{d}{h}$, & $\frac{q}{r}$ pro dato $1 + \frac{f}{g} + \frac{f}{h} - \frac{e}{d}$, & habebitur æquatio $\frac{px + qy}{r} = a$.

Adhæc propter datos omnes angulos datur ratio BCq ad triangulum BCE, quam pone m ad n & erit triang. $BCE = \frac{n}{m}yy$. Datur etiam ratio AEq ad triangulum ADE; quam pone m ad d; & erit triang. $ADE = \frac{ddxx + 2dfxy + ffyy}{dm}$. Quare cum area AC, quæ eſt horum triangulorum differentia, detur, eſto bb & erit $\frac{ddxx + 2dfxy + ffyy - dnyy}{dm} = bb$. Atque ita habentur duæ æquationes ex quarum reductione omnia determinantur. Nempe ſuperior æquatio dat $\frac{ra - qy}{p} = x$, ſcribendo $\frac{ra - qy}{p}$ pro x in inferiori, provenit $\frac{drraa - 2dqray + dqqyy}{ppm}$ $\frac{+ 2afry - 2fqyy}{pm} + \frac{ffyy - dnyy}{dm} = bb$. Et abbreviatis

tis terminis scribendo s pro dato $\frac{dqq}{pp} - \frac{2fq}{p} - \frac{ff}{d} - n$, & st pro dato $+ \frac{adqr}{pp} - \frac{afr}{p}$, ac stv pro dato $bbm - \frac{drraa}{pp}$, oritur $yy = 2ty + tv$ seu $y = t + \sqrt{tt + tv}$.

PROB. XIX.

Piscinam ABCD perambulatorio ABCD EFGH datæ areæ, & ejusdem ubique latitudinis circundare.



Esto perambulatorii latitudo x & ejus area aa. Et à punctis A, B, C, D, ad lineas EF, FG, GH & HE demissis perpendicularibus AK, BL, BM, CN, CO, DP, DQ, AI, perambulatorium dividetur in quatuor trapezia IK, LM, NO, PQ & in quatuor parallelogramma AL, BN, CP, DI, latitudinis x, & ejusdem longitudinis cum lateribus dati trapezii. Sit ergo summa laterum $(AB + BC + CD + DA) = b$, & erit summa parallelogrammorum $= bx$.

Porro ductis AE, BF, CG, DH; cum sit AI = AK erit ang. AEI = ang. AEK = $\frac{1}{2}$ IEK sive $\frac{1}{2}$ DAB. Datur ergo ang. AEI & proinde ratio ipsius AI ad IE, quam pone d ad e; & erit IE $= \frac{ex}{d}$. Hanc duc in $\frac{1}{2}$ AI sive $\frac{1}{2}x$ & fiet area tri-

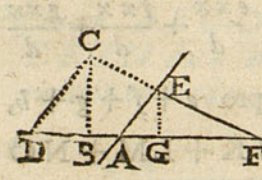
anguli

anguli AEI $= \frac{exx}{2d}$. Sed propter æquales angulos & latera, triangula AEI & AEK ſunt æqualia, adeoque trapezium IK ($=$ 2 triang. AEI) $= \frac{exx}{d}$. Simili modo ponendo BL. LF :: d. f, & CN. NG :: d. g, & DP. PH :: d. h, (nam illæ etiam rationes dantur ex datis angulis B, C, ac D) habebitur trapezium LM $= \frac{fxx}{d}$, NO $= \frac{gxx}{d}$, & PQ $= \frac{hxx}{d}$. Quamobrem $\frac{exx}{d} + \frac{fxx}{d} + \frac{gxx}{d} + \frac{hxx}{d}$ ſive $\frac{pxx}{d}$ ſcribendo p pro $e+f+g+h$, erit æquale trapeziis quatuor IK + LM + NO + PQ; & proinde $\frac{pxx}{d} + bx$, æquabitur toti perambulatorio aa. Quæ æquatio dividendo omnes terminos per $\frac{p}{d}$ & extrahendo radicem ejus, evadet $x = \frac{-db + \sqrt{bbdd + 4aapd}}{2p}$. Latitudine Perambulatorii ſic inventa facile eſt ipſum deſcribere.

PROB.

PROB. XX.

A dato puncto C rectam lineam CF ducere quæ cum aliis duabus positione datis rectis AE & AF triangulum datæ magnitudinis AEF comprehendet



Age CD parallelam AE, & CB ac EG perpendiculares in AF, sitque AD $= a$, CB $= b$, AF $= x$, & trianguli AEF area cc, & propter proportionales DF. AF (:: DC. AE) :: CB. EG, hoc est $a + x . x :: b . \frac{bx}{a+x}$ erit $\frac{bx}{a+x} =$ EG. Hanc duc in $\frac{1}{2}$AF, & emerget $\frac{bxx}{2a+2x}$ quantitas areæ AEF quæ proinde æquatur cc. Atque adeo æquatione ordinata est $xx = \frac{2ccx + 2cca}{b}$ seu $x = \frac{cc + \sqrt{c^4 + 2ccab}}{b}$.

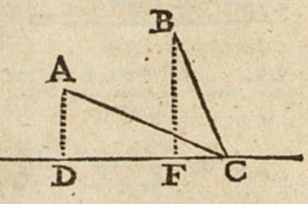
Nihil secus recta per datum punctum ducitur quæ triangulum vel trapezium quodvis in data ratione secabit.

PROB.

PROB. XXI.

Punctum C in data recta linea D F determinare, à quo ad alia duo positione data puncta A & B ductæ rectæ AC & BC datam habeant differentiam. Vide Prop. 45.

A Datis punctis ad datam rectam demitte perpendiculares AD & BF, & dic AD $= a$, BF $= b$, DF $= c$, DC $= x$, & erit



AC $= \sqrt{aa + xx}$, FC $= x - c$, & BC $= \sqrt{bb + xx - 2cx + cc}$. Sit jam data harum differentia d, existente AC majori quam BC erit $\sqrt{aa + xx} - d = \sqrt{bb + xx - 2cx + cc}$. Et quadratis partibus $aa + xx + dd - 2d\sqrt{aa + xx} = bb + xx - 2cx + cc$. Factaque reductione & abbreviandi causa pro datis $aa + dd - bb - cc$ scripto $2ee$, emerget $ee + cx = d\sqrt{aa + xx}$. Iterumque quadratis partibus $e^4 + 2ceex + ccxx = ddaa + ddxx$.

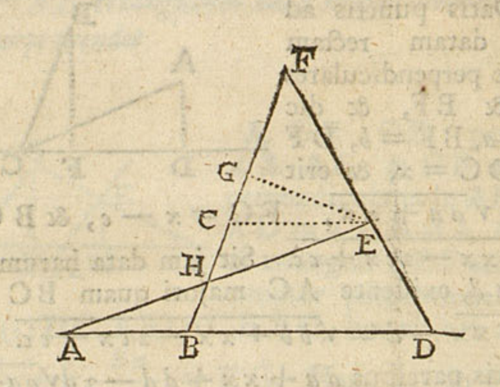
Et æquatione reducta $xx = \dfrac{2eecx + e^4 - aadd}{dd - cc}$, seu $x = \dfrac{eec + \sqrt{e^4dd - aad^4 + aaddcc}}{dd - cc}$.

Haud secus problema resolvitur si linearum AC & BC summa vel quadratorum summa aut differentia, vel proportio vel rectangulum vel angulus ab ipsis comprehensus detur; vel etiam si vice rectæ DC, circumferentia circuli, aut alia quævis curva linea adhibeatur, modo calculus (in hoc ultimo præsertim casu) referatur ad lineam conjungentem puncta A & B.

PROB.

PROB. XXII.

Datis positione tribus rectis AD, AE, BF, quartam DF ducere, cujus partes DE EF prioribus interceptæ, datarum erunt longitudinum.



Ad BF demitte perpendicularem EG, ut & obliquam EC parallelam AD, & rectis tribus positione datis concurrentibus in A, B, & H, dic $AB = a$, $BH = b$, $AH = c$, $ED = d$, $EF = e$, & $HE = x$. Jam propter similia triangula ABH, ECH, est AH. AB :: HE. $EC = \frac{ax}{c}$, & AH. HB :: HE. $CH = \frac{bx}{c}$. Adde HB, & fit CB $= \frac{bx + bc}{c}$. Insuper propter similia triangula FEC, FDB, est ED. CB :: EF. $CF = \frac{ebx + ebc}{dc}$. Denique per 12 & 13. II. Elem. est $\frac{ECq - EFq}{2FC}$ $+ \frac{1}{2}FC$

$+\frac{1}{2}FC(=CG)=\frac{HEq-ECq}{2CH}-\frac{1}{2}CH$, hoc est

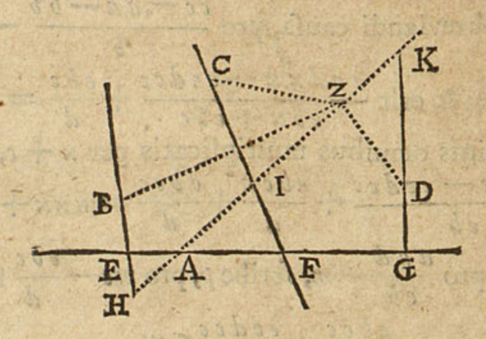
$$\frac{\frac{aaxx}{cc}-ee}{\frac{2ebx+2ebc}{dc}}+\frac{ebx+ebc}{2dc}=\frac{xx-\frac{aaxx}{cc}}{\frac{2bx}{c}}-\frac{bx}{2c}.$$ Sive

$$\frac{aadxx-eedcc}{ebx+ebc}+\frac{ebx}{d}+\frac{ebc}{d}=\frac{ccx-aax-bbx}{b};$$

Hic, abbreviandi causa, pro $\frac{cc-aa-bb}{b}-\frac{eb}{d}$, scribe m; & erit $\frac{aadxx-eedcc}{ebx+ebc}+\frac{ebc}{d}=mx$, ac terminis omnibus multiplicatis per $x+c$, fiet $\frac{aadxx-eedcc}{eb}+\frac{ebcx}{d}+\frac{ebcc}{d}=mxx+mcx$. Iterum pro $\frac{aad}{eb}-m$, scribe p, pro $mc-\frac{ebc}{d}$ scribe $2pq$, & pro $-\frac{ebcc}{d}+\frac{eedcc}{eb}$ scribe prr, & evadet $xx=2qx+rr$, & $x=q\pm\sqrt{qq+rr}$. Invento x sive HE, age EC parallelam AB, & Cape FC. BC :: e. d, & acta FED conditionibus quæstionis satisfaciet.

PROB. XXIII.

Punctum Z determinare à quo ad quatuor positione datas rectas lineas FA, EB, FC, GD, si aliæ quatuor lineæ ZA, ZB, ZC, & ZD in datis angulis ducantur, duarum è ductis ZA & ZB rectangulum & aliarum duarum ZC & ZD summa detur.



E Lineis elige aliquam positione datam FA ut & positione non datam ZA quæ ad illam ducitur, ex quarum longitudinibus punctum Z determinetur, & cæteras positione datas lineas produc donec his, si opus est etiam productis, occurrant, ut vides. Dictisque EA $= x$, & AZ $= y$, propter angulos trianguli AEH datos dabitur ratio AE ad AH quam pone p ad q, & erit AH $= \frac{qx}{p}$. Adde AZ, fitque ZH $= y + \frac{qx}{p}$. Et inde cum propter datos angulos trianguli HZB detur ratio HZ ad BZ si ea ponatur n ad p habebitur ZB $= \frac{py + qx}{n}$.

Præte-

Præterea si data EF dicatur a, erit $AF = a - x$, indeque, si propter datos angulos trianguli AFI statuatur AF ad AI in ratione p ad r, evadet $AI = \frac{ra - rx}{p}$. Hanc aufer ab AZ & restabit $IZ = y - \frac{ra - rx}{p}$. Et propter datos angulos trianguli ICZ, si ponatur IZ ad ZC in ratione m ad p, evadet $ZC = \frac{py - ra + rx}{m}$.

Ad eundem modum si ponatur $EG = b$. $AG. AK :: l : s$ & $ZK. ZD :: p. l.$ obtinebitur $ZD = \frac{sb - sx - ly}{p}$.

Jam ex statu quæstionis si duarum ZC & ZD summa $\frac{py - ra + rx}{m} + \frac{sb - sx - ly}{p}$ ponatur æqualis dato alicui f; & aliarum duarum rectangulum $\frac{pyy + qxy}{n}$ æquale gg, habebuntur duæ æquationes pro determinandis x & y. Per posteriorem fit $x = \frac{ngg - pyy}{qy}$. & hunc ipsius x valorem scribendo pro eo in priori æquatione, evadet $\frac{py - ra}{m} + \frac{rngg - rpyy}{mqy} + \frac{sb - ly}{p} - \frac{sngg - spyy}{pqy} = f$. Et reducendo $yy = \frac{apqry - bmqsy + fmpqy + ggmns - ggnpr}{ppq - ppr - mlq + mps}$. Et abbrevi. causa scripto $2h$ pro $\frac{apqr - bmqs + fmpq}{ppq - ppr - mlq + mps}$, & kk pro $\frac{ggmns - ggpnr}{ppq - ppr - mlq + mps}$ fiet $yy = 2hy$

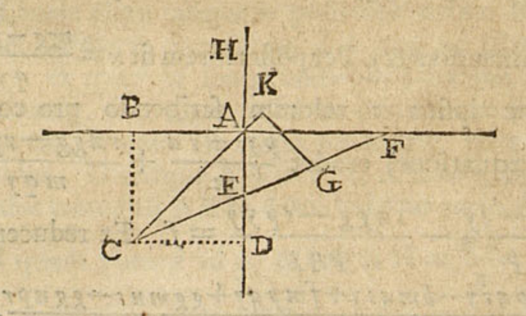
 $+ kk$

$+ kk$, sive $y = h \pm \sqrt{hh + kk}$. Cujus æquationis ope cum y innotescit, æquatio $\frac{ngg - pyy}{qy} = x$ dabit x. Quod sufficit ad determinandum punctum z.

Ad eundem fere modum punctum determinatur à quo ad plures vel pauciores positione datas rectas totidem aliæ rectæ ducantur ea lege ut aliquarum summa vel differentia vel contentum detur, aut æquetur cæterarum summæ vel differentiæ vel contento, vel ut alias quaslibet habeant assignatas conditiones.

PROB. XXIV.

Angulum rectum EAF data recta EF subtendere, quæ transibit per datum punctum C, a lineis rectum angulum comprehendentibus æquidistans.



QUadratum ABCD compleatur, & linea EF bisecetur in G. Tum dic CB vel CD esse a, EG vel FG esse b, & CG esse x; eritque $CE = x - b$, & $CF = x + b$. Dein cum $CFq - BCq = BFq$, erit $BF = \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Denique

nique propter similia triangula CDE, FBC, est CE. CD::CF. BF, sive $x-b.\ a::x+b.\ \sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Unde $ax+ab=\overline{x-b}\times\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Cujus æquationis utraque parte quadrata, & prodeuntibus terminis in ordinem redactis, prodit $x^4 = \begin{smallmatrix}2aa\\+2bb\end{smallmatrix}xx\begin{smallmatrix}+2aabb\\-b^4\end{smallmatrix}$. Et extracta radice sicut fit in æquationibus quadraticis, prodit $xx=aa+bb+\sqrt{a^4+4aabb}$. Adeoque $x=\sqrt{aa+bb+\sqrt{a^4+4aabb}}$. CG sic inventa dat CE vel CF, quæ determinando punctum E vel F problemati satisfacit.

Idem aliter.

Sit CE $=x$, CD $=a$, & EF $=b$, eritque CF $=x+b$ & BF $=\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Et proinde cum sit CE. CD::CF. BF, sive $x.a::x+b.\ \sqrt{xx+2bx+bb-aa}$, erit $ax+ab=x\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Hujus æquationis partibus quadratis, & terminis in ordinem redactis prodibit $x^4+2bx^3\begin{smallmatrix}+bb\\-2aa\end{smallmatrix}xx-2aabx-aabb=0$, æquatio biquadratica, cujus radicis investigatio difficilior est quam in priori casu. Sic autem investigari potest. Pone $x^4+2bx^3\begin{smallmatrix}+bb\\-2aa\end{smallmatrix}xx-2aabx+a^4=aabb+a^4$, & extracta utrobique radice $xx+bx-aa=\pm a\sqrt{aa+bb}$.

Ex his occasionem nactus sum tradendi *Regulam de electione terminorum* ad ineundum calculum.

Scilicet cum duorum terminorum talis obvenit affinitas sive similitudo relationis ad cæteros terminos quæstionis, ut

oporteret æquationes per omnia similes ex utrovis adhibito produci, aut ambos si simul adhiberentur easdem in æquatione finali dimensiones & eandem omnino formam (signis forte + & — exceptis) habituros esse; (id quod facile prospicitur;) tunc neutrum adhibere convenit, sed eorum vice tertium quemvis eligere qui similem utrique relationem gerit, puta semisummam vel semidifferentiam, vel medium proportionale forsan, aut quamvis aliam quantitatem utrique indifferenter & sine compare relatam.

Sic in præcedente problemate cum viderim lineam E F pariter ad utramque A B & A D referri (quod patebit si ducas itidem E F in angulo BAH,) atque adeo nulla ratione suaderi possem cur E D potius quam B F, vel A E potius quam A F vel C E potius quam C F pro quærenda quantitate adhiberentur; vice punctorum C & F unde hæc ambiguitas proficiscitur, sumpsi (in solutione priori) intermedium G quod parem relationem ad utramque linearum A B & A D observat. Deinde ab hoc G non demisi perpendiculum ad A F pro quærenda quantitate, quia potui eadem ratione demisisse ad A D. Et eapropter in neutrum C B vel C D demisi, sed institui C G quærendum esse quod nullum admittit compar; & sic æquationem biquadraticam obtinui sine terminis imparibus.

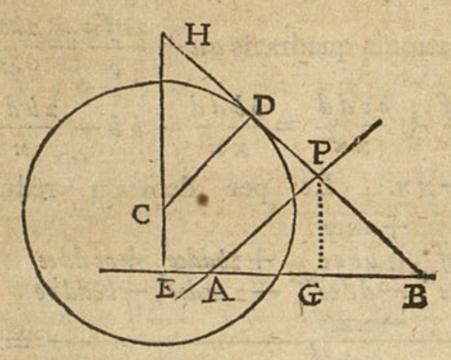
Potui etiam (animadverso quod punctum G jaceat in peripheria circuli centro A, radio E G descripti) demisisse G K perpendiculum in diagonalem A C, & quæsivisse A K vel C K, (quippe quæ similem etiam utrique A B & A D relationem gerunt;) atque ita in æquationem quadraticam $yy = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{4}bb$ incidissem posito $AK = y$, $AC = e$, & $EG = b$. Et A K sic invento erigendum fuisset perpendiculum K G præfato circulo occurrens in G. per quod C F transiret.

Ad hanc regulam animum advertens, in Prob. 9. & 10. ubi trianguli latera germana B C & A C deter-

determinanda erant, quæſivi potius ſemidifferentiam quam alterutrum eorum. Sed regulæ hujus utilitas è ſequenti Problemate magis eluceſcet.

PROB. XXV.

Ad Circulum centro C radio CD deſcriptum ducere Tangentem DB, cujus pars PB inter rectas poſitione datas AP, AB ſita ſit datæ longitudinis.



A Centro C ad alterutram rectarum poſitione datarum puta AB demitte normalem CE, eamque produc donec Tangenti DB occurrat in H. Ad eandem AB demitte etiam normalem PG. & dictis $EA = a$, $EC = b$, $CD = c$, $BP = d$, & $PG = x$, propter ſimilia triangula PGB, CDH erit $GB\ (\sqrt{dd - xx}).\ PB :: CD.\ CH = \frac{cd}{\sqrt{dd - xx}}$. Adde EC; & fiet $EH = b + \frac{cd}{\sqrt{dd - xx}}$. Porro eſt $PG.\ GB :: EH.\ EB = \frac{b}{x}\sqrt{dd - xx} + \frac{cd}{x}$. Adhæc propter angulum PAG datum datur ratio

 PG

P G ad A G, qua posita e ad f erit A G $= \frac{fx}{e}$. Adde E A & B G, & habebitur denuo E B $= a + \frac{fx}{e} + \sqrt{dd - xx}$. Est itaque $\frac{cd}{x} + \frac{b}{x}\sqrt{dd - xx} = a + \frac{fx}{e} + \sqrt{dd - xx}$, & per transpositionem terminorum $a + \frac{fx}{e} - \frac{cd}{x} = \frac{b - x}{x}\sqrt{dd - xx}$. Et partibus æquationis quadratis $aa + \frac{2afx}{e} - \frac{2acd}{x} + \frac{ffxx}{ee} - \frac{2cdf}{e} + \frac{ccdd}{xx} = \frac{bbdd}{xx} - bb - \frac{2bdd}{x} + 2bx + dd - xx$. Et per debitam reductionem

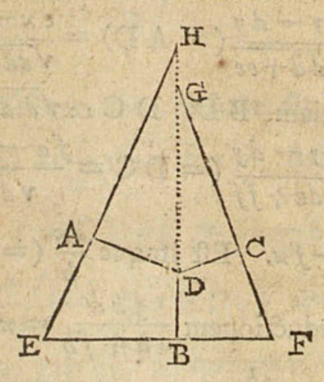
$$\frac{x^4 \begin{matrix} +2aef \\ -2bee \end{matrix} x^3 \begin{matrix} +aaee \\ +bbee \\ -ddee \\ -2cdef \end{matrix} xx \begin{matrix} +2bddee \\ -2acdee \end{matrix} x \begin{matrix} +ccddee \\ -bbddee \end{matrix}}{ee + ff} = 0.$$

PROB.

PROB. XXVI.

Invenire punctum D à quo tres rectæ D A, D B, D C ad totidem alias positione datas rectas A E, B F, C F perpendiculariter demissæ; datam inter se rationem obtineat.

E Rectis positione datis producatur una puta B F, ut & ejus perpendicularis B D donec reliquis A E & C F occurrant; B F quidem in E & F; B D autem in H & G. Jam sit E B $= x$ & E F $= a$; eritque B F $= a - x$. Cum autem propter datam positionem rectarum E F, E A, & F C, anguli E & F, adeoque rationes laterum triangulorum E B H & F B G dentur; sit



E B ad B H ut d ad e; & erit B H $= \frac{ex}{d}$, & E H $(= \sqrt{EBq + BHq}) = \sqrt{xx + \frac{eexx}{dd}}$, hoc est $= \frac{x}{d}\sqrt{dd + ee}$. Sit etiam B F ad B G ut d ad f; & erit B G $= \frac{fa - fx}{d}$ & F G $(= \sqrt{BFq + BGq})$ $= \sqrt{aa - 2ax + xx + \frac{ffaa - 2ffax + ffxx}{dd}}$, hoc est $= \frac{a - x}{d}\sqrt{dd + ff}$. Præterea dicatur B D $= y$,

&

& erit $HD = \frac{ex}{d} - y$, & $GD = \frac{fa - fx}{d} - y$, adeoque cum sit $AD . HD$ (:: $EB . EH$) :: $d . \sqrt{dd + ee}$, & $DC . GD$ (:: $BF . FG$) :: $d . \sqrt{dd + ff}$, erit $AD = \frac{ex - dy}{\sqrt{dd + ee}}$, & $DC = \frac{fa - fx - dy}{\sqrt{dd + ff}}$. Denique ob datas rationes linearum BD, AD, DC, sit $BD . AD :: \sqrt{dd + ee} . h - d$, & erit $\frac{hy - dy}{\sqrt{dd + ee}}$ (= AD) $= \frac{ex - dy}{\sqrt{dd + ee}}$, sive $hy = ex$. Sit etiam $BD . DC :: \sqrt{dd + ff} . k - d$ & erit $\frac{ky - dy}{\sqrt{dd + ff}}$ (= DC = $\frac{fa - fx - dy}{\sqrt{dd + ff}}$, sive $ky = fa - fx$. Est itaque $\frac{ex}{h}$ $(= y) = \frac{fa - fx}{k}$; & per reductionem $\frac{fha}{ek + fh} = x$. Quare cape $EB . EF :: h . \frac{ek}{f} + h$, dein $BD . EB :: e . h$, & habebitur punctum quæsitum D.

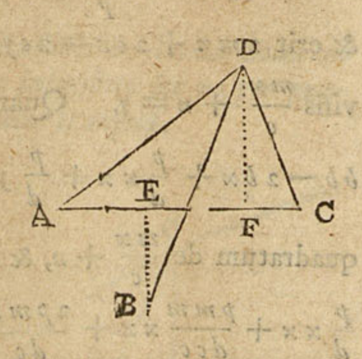
PROB. XXVII.

Invenire punctum D, à quo tres rectæ DA, DB, DC ad data tria puncta A, B, C, ductæ, datam inter se rationem obtineant.

E Datis tribus punctis junge duo quævis puta A & C; & à tertio B ad lineam conjungentem AC demitte perpendiculum BE, ut & perpendiculum DF à puncto quæsito D dictisque $AE = a$, $AC = b$, $EB = c$, $AF = x$, & $FD = y$, erit

AD*q*

$ADq = xx + yy$. $FC = b - x$. CDq ($= FCq + FDq$) $= bb - 2bx + xx + yy$. $EF = x - a$, ac BDq ($= EFq + \overline{EB + FD}$ quad.) $= xx - 2ax + aa + cc + 2cy + yy$. Jam cum ſit AD ad CD in data ratione, ſit iſta ratio d ad e; & erit $CD = \frac{e}{d}\sqrt{xx + yy}$.



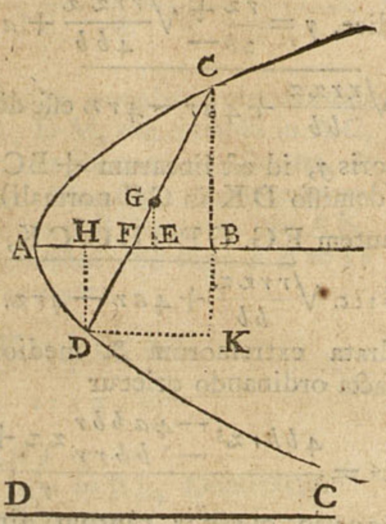
Cum etiam ſit AD ad BD in data ratione, ſit iſta ratio d ad f, & erit $BD = \frac{f}{d}\sqrt{xx + yy}$. Adeoque eſt $\frac{eexx + eeyy}{dd}$ ($= CDq$) $= bb - 2bx + xx + yy$, & $\frac{ffxx + ffyy}{dd}$ ($= BDq$) $= xx - 2ax + aa + cc + 2cy + yy$. In quibus ſi, abbreviandi cauſa, pro $\frac{dd - ee}{d}$ ſcribatur p, & q pro $\frac{dd - ff}{d}$, emerget $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0$, & $aa + cc - 2ax + 2cy + \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy = 0$. Per priorem eſt $\frac{2bqx - bbq}{p} = \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$. Quare in poſteriori pro $\frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$ ſcribe $\frac{2bqx - bbq}{p}$, & orietur $\frac{2bqx - bbq}{p} + aa + cc - 2ax + 2cy = 0$. Iterum, abbreviandi cauſa, ſcribe

scribe m pro $a-\frac{bq}{p}$, & $2cn$ pro $\frac{bbq}{p}-aa-cc$, & erit $2mx+2cn=2cy$; terminisque per $2c$ divisis $\frac{mx}{c}+n=y$. Quamobrem in æquatione $bb-2bx+\frac{p}{d}xx+\frac{p}{d}yy=0$, pro yy scribe quadratum de $\frac{mx}{c}+n$, & habebitur $bb-2bx+\frac{p}{d}xx+\frac{pmm}{dcc}xx+\frac{2pmn}{dc}x+\frac{pnn}{d}=0$. Ubi denuo si, abbreviandi causa, $\frac{b}{r}$ scribatur pro $\frac{p}{d}+\frac{pmm}{dcc}$, $\frac{sb}{r}$ pro $b-\frac{pmn}{dc}$, & $\frac{tbb}{r}$ pro $bb+\frac{pnn}{d}$, habebitur $xx=2sx-tb$. Et extracta radice $x=s\pm\sqrt{ss-tb}$. Invento x æquatio $\frac{mx}{c}+n=y$, dabit y; & ex datis x & y, hoc est AF & FD determinatur punctum quæsitum D.

PROB.

PROB. XXVIII.

Rectam DC datæ longitudinis in datam Conicam sectionem DAC sic inscribere ut ea per punctum G positione datum transeat.



SIT AF axis Curvæ, & à punctis D, G & C ad hunc demitte normales DH, GE, & CB. Jam ad determinandam positionem rectæ DC puncti D aut C inventio proponi potest; sed cum hæc sint germana, & adeo paria ut ad alterutrum determinandum operatio similis evasura esset, sive quærerem CG, CB, aut AB; sive comparia DG, DH, aut AH; ea propter de tertio aliquo puncto prospicio quod utrumque D & C similiter respectet, & una determinet. Et hujusmodi video esse punctum F.

Jam sit $AE = a$, $EG = b$, $DC = c$, $EF = z$; & præterea cum relatio inter AB & BC habeatur in æquatione quam suppono pro Conica sectione determinanda datam esse, sit $AB = x$, & $BC = y$, & erit $FB = x - a + z$. Et propter GE. EF :: CB. FB erit iterum $FB = \frac{yz}{b}$. Ergo $x - a + z = \frac{yz}{b}$.

His

His ita præparatis tolle x per æquationem quæ curvam designat. Quemadmodum si Curva sit Parabola per æquationem $rx = yy$ designata, scribe $\frac{yy}{r}$ pro x; & orietur $\frac{yy}{r} - a + z = \frac{yz}{b}$. Et extracta radice, $y = \frac{rz}{2b} \pm \sqrt{\frac{rrzz}{4bb} + ar - rz}$. Unde patet $\sqrt{\frac{rrzz}{bb} + 4ar - 4rz}$ esse differentiam gemini valoris y, id est linearum $+$ BC & $-$ DH, adeoque (demisso DK in CB normali) valere CK. Est autem FG. GE :: DC. CK, hoc est $\sqrt{bb + zz}$. b :: c. $\sqrt{\frac{rrzz}{bb} + 4ar - 4rz}$. Ducendoque quadrata extremorum & mediorum in invicem, & facta ordinando orietur

$$z^4 = \frac{4bbrz^3 \begin{matrix} -4abbr \\ -bbrr \end{matrix} zz + 4b^4rz \begin{matrix} -4ab^4r \\ +b^4cc \end{matrix}}{rr},$$

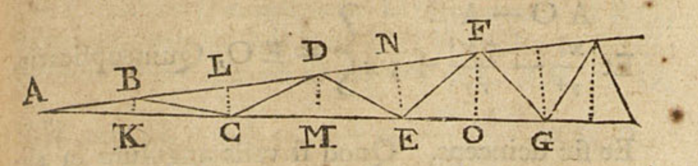
æquatio quatuor tantum dimensionum, quæ ad octo dimensiones ascendisset si quæsivissem CG vel CB aut AB.

PROB. XXIX.

Datum angulum per datum numerum multiplicare vel dividere.

IN angulo quovis FAG inscribe lineas AB, BC, CD, DE, *&c.* Ejusdem cujusvis longitudinis, & erunt triangula ABC, BCD, CDE, DEF, *&c.* Isoscelia; adeoque per 32. I. Elem. erit ang. CBD = ang. A + ACB = 2 ang. A, &

& ang. DCE = ang. A + ADC = 3 ang. A & ang. EDF = A + AED = 4 ang. A, & ang. FEG = 5 ang. A, & sic deinceps. Positis jam



AB, BC, CD, *&c.* radiis æqualium circulorum, perpendicula BK, CL, DM, *&c.* demissa in AC, BD, CE, *&c.* erunt sinus istorum angulorum, & AK, BL, CM, DN, *&c.* sinus complementorum ad rectum. Vel posita AB diametro illæ AK, BL, CM, *&c.* erunt chordæ. Sit ergo AB $= 2r$ & AK $= x$, dein sic operare.

AB . AK :: AC . AL.

$2r \,.\, x :: 2x \,.\, \frac{xx}{r}.$

$\left.\begin{array}{l} AL - AB \\ \text{Et } \frac{xx}{r} - 2r \end{array}\right\} = BL$, Duplicatio.

AB . AK :: AD (2AL − AB) . AM.

$2r \,.\, x :: \frac{2xx}{r} - 2r \,.\, \frac{x^3}{rr} - x.$

$\left.\begin{array}{l} AM - AC \\ \text{Et } \frac{x^3}{rr} - 3x \end{array}\right\} = CM$, Triplicatio.

AB . AK :: AE (2AM − AC) . AN.

$2r \,.\, x :: \frac{2x^3}{rr} - 4x \,.\, \frac{x^4}{r^3} - \frac{2xx}{r}.$

$\left.\begin{array}{l} AN - AD \\ \text{Et } \frac{x^4}{r^3} - \frac{4xx}{r} + 2r \end{array}\right\} = DN$, Quadruplicatio.

AB. AK. ::

AB.AK::AF(2AN−AD).AO.

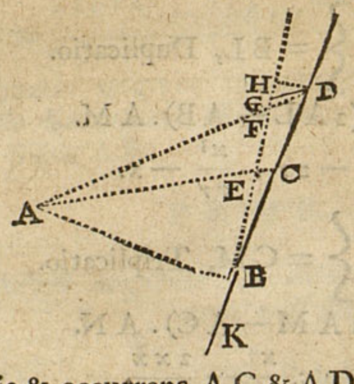
$$2r\,.\,x\;::\;\frac{2x^4}{r^3}-\frac{6xx}{r}+2r.\;\frac{x^5}{r^4}-\frac{3x^3}{rr}+x.$$

$$\left.\begin{array}{l}AO-AE\\ \text{Et } \frac{x^5}{r^4}-\frac{5x^3}{rr}+5x\end{array}\right\}=EO,\ \text{Quintuplicatio.}$$

Et sic deinceps. Quod si velis angulum in aliquot partes dividere, pone q pro BL, CM, DN, &c. Et habebis $xx-2rr=qr$ ad bisectionem, $x^3-3rrx=qrr$ ad trisectionem, $x^4-4rrxx+2r^4=qr^3$ ad quadrisectionem, $x^5-5rrx^3+5r^4x=qr^4$ ad quinquisectionem &c.

PROB. XXX.

Cometæ in linea recta BD uniformiter progredientis positionem cursus ex tribus observationibus determinare.



SIT A oculus spectatoris, B locus Cometæ in prima observatione, C in secunda ac D in tertia; quærenda erit inclinatio lineæ BD ad lineam AB. Ex observationibus itaq; dantur anguli BAC BAD; adeoq; si BH ducatur ad AB normalis & occurrens AC & AD in E & F, ex assumpto utcunque AB dabuntur BE & BF, tangentes nempe præfatorum angulorum respectu radii AB. Sit ergo $AB=a$, $BE=b$, & $BF=c$. Porro ex datis observationum intervallis dabitur ratio BC ad

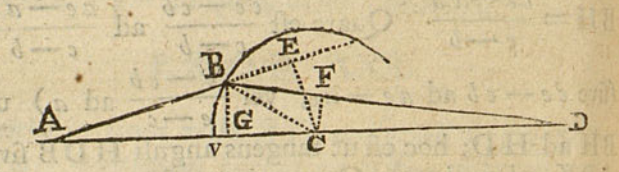
ad B D quæ si ponatur b ad e, & agatur D G parallela A C, cum sit B E ad B G in eadem ratione, & B E dicta fuerit b erit B G $= e$, adeoque G F $=$ $e - c$. Adhæc si demittatur D H normalis ad B G, propter triangula A B F & D H F similia & similiter secta lineis A E ac D G, erit F E. A B : : F G. H D, hoc est $c - b . a : : e - c . \frac{ae - ac}{c - b} =$ H D. Erit etiam F E. F B : : F G . F H, hoc est $c - b . c : : e - c . \frac{ce - cc}{c - b} =$ F H; cui adde B F sive c & fit B H $= \frac{ce - cb}{c - b}$. Quare est $\frac{ce - cb}{c - b}$ ad $\frac{ae - ac}{c - b}$, (sive $ce - cb$ ad $ae - ac$, vel $\frac{ce - cb}{e - c}$ ad a) ut B H ad H D; hoc est ut tangens anguli H D B sive A B K ad radium. Quare cum a supponatur esse radius, erit $\frac{ce - cb}{e - c}$ tangens anguli A B K, adeoque facta resolutione erit ut $e - c$ ad $e - b$ (sive G F ad G E) ita c (sive tangens anguli B A F) ad tangentem anguli A B K.

Dic itaque ut tempus inter primam & secundam observationem, ad tempus inter primam ac tertiam, ita tangens anguli B A E, ad quartam proportionalem. Dein ut differentia inter illam quartam proportionalem & tangentem anguli B A F, ad differentiam inter eandem quartam proportionalem & tangentem anguli B A E, ita tangens anguli B A F, ad tangentem anguli A B K.

PROB. XXXI.

Radiis a puncto lucido ad sphæricam superficiem refringentem divergentibus, invenire concursus singulorum refractorum cum axe sphæræ per punctum illud lucidum transeunte.

SIT A punctum illud lucidum, & BV sphæra, cujus axis AD, Centrum C, & vertex V, sitque AB radius incidens & BD refractus ejus, ac demis-



sis ad radios istos perpendicularibus CE & CF, ut & BG perpendiculari ad AD, actaque BC, dic AC $= a$, VC vel BC $= r$, CG $= x$, & CD $= z$, eritque AG $= a - x$, BG $= \sqrt{rr - xx}$, AB $= \sqrt{aa - 2ax + rr}$; & propter sim. tri. ABG & ACE, CE $= \dfrac{a\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{aa - 2ax + rr}}$. Item GD $= z + x$, BD $= \sqrt{zz + 2zx + rr}$: & propter sim. tri. DBG ac DCF, CF $= \dfrac{z\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{zz + 2zx + rr}}$. Præterea cum ratio sinuum incidentiæ & refractionis, adeoque CE ad CF detur, pone illam rationem esse a ad f, & erit $\dfrac{fa\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{aa - 2ax + rr}} = \dfrac{az\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{zz + 2zx + rr}}$, ac multiplicando in crucem, dividendoque per $a\sqrt{rr - xx}$, erit

erit $f\sqrt{zz+2zx+rr} = z\sqrt{aa-2ax+rr}$, & quadrando, ac redigendo terminos in ordinem, $zz = \frac{2ffxz+ffrr}{aa-2ax+rr-ff}$. Denique pro dato $\frac{ff}{a}$ scribe p, & q pro dato $a+\frac{rr}{a}-p$, & erit

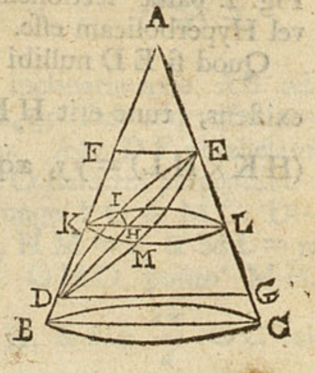
$$zz = \frac{2pxz+prr}{q-2x} \text{ ac } z = \frac{px+\sqrt{ppxx-2prrx+pqrr}}{q-2x}.$$

Inventum est itaque z; hoc est longitudo CD, adeoque punctum quæsitum D quo refractus BD concurrit cum axe. Q. E. F.

Posui hic incidentes radios divergentes esse, & in Medium densius incidere; sed mutatis mutandis Problema perinde resolvitur ubi convergunt, vel incidunt è densiori Medio in rarius.

PROB. XXXII.

Si Conus plano quolibet secetur, invenire figuram sectionis.



SIT ABC conus circulari basi BC insistens; IEM ejus sectio quæsita; KILM alia quælibet sectio parallela basi; & occurrens priori sectioni in HI; & ABC tertia sectio perpendiculariter bisecans priores duas in EH & KL, & conum in triangulo ABC. Et producto EH donec occurrat ipsi AK in D, actisque EF ac DG parallelis KL & occurrentibus AB & AC in F ac G, dic $EF=a$, $DG=b$,

 $ED=c$,

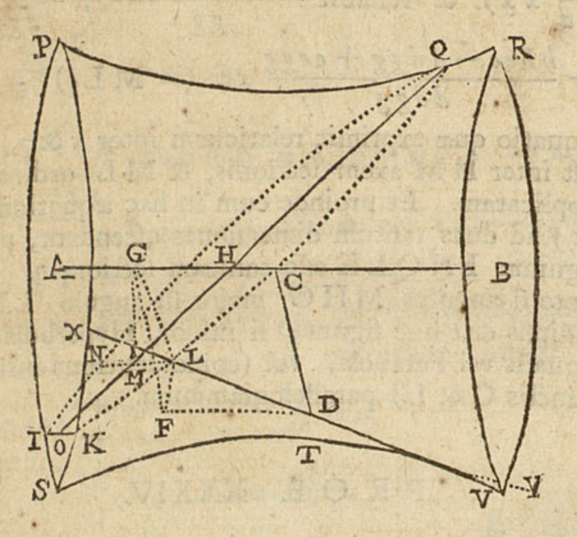
$ED = c$, $EH = x$, & $HI = y$; & propter sim. tri. EHL, EDG, erit ED. DG : : EH. HL $= \frac{bx}{c}$. Dein propter sim. tri. DEF, DHK, erit DE. EF : : DH. ($c - x$ in Fig. 1, & $c + x$ in Fig. 2.) $HK = \frac{ac \mp ax}{c}$. Deniq; cum sectio KIL sit parallela basi adeoque circularis, erit $HK \times HL = HIq$, hoc est $\frac{ab}{c}x \mp \frac{ab}{cc}xx = yy$, æquatio quæ exprimit relationem inter EH (x) & HI (y) hoc est inter axem & ordinatim applicatam sectionis EIM, quæ æquatio cum sit ad Ellipsin in Fig. 1, & ad Hyperbolam in Fig. 2. patet sectionem illam perinde Ellipticam vel Hyperbolicam esse.

Quod si ED nullibi occurrat AK, ipsi parallela existens, tunc erit $HK = EF$ (a,) & inde $\frac{ab}{c}x$ ($HK \times HL$) $= yy$, æquatio ad Parabolam.

PROB.

PROB. XXXIII.

Si recta XY circa axem AB, ad distantiam CD, in data inclinatione ad planum DCB convolvatur, & solidum PQRVTS ista convolutione generatum secetur plano quolibet INQLK; invenire figuram Sectionis.



ESto BHQ vel GHO inclinatio axis AB ad planum sectionis; & L quilibet concursus rectæ XY cum plano illo. Age DF parallelam AB, & ad AB, DF & HO demitte perpendiculares LG, LF, LM, ac junge FG & MG. Dictisque CD $= a$, CH $= b$, HM $= x$, & ML $= y$; & propter datum angulum GHO posito MH. HG :: $d. e$: erit $\frac{ex}{d} =$ GH, & $b + \frac{ex}{d}$ GC vel FD. Adhæc propter angulum datum LDF (nempe inclinationem rectæ XY ad planum GCDF) posito

posito FD. FL :: $g. h$, erit $\frac{hb}{g} + \frac{hex}{dg} = FL$, cujus quadrato adde FGq, (DCq seu aa) & emerget $GLq = aa + \frac{hhbb}{gg} + \frac{2hhbex}{dgg} + \frac{hheexx}{ddgg}$. Hinc aufer MGq ($HMq - HGq$ seu $xx - \frac{ee}{dd}xx$) & restabit $\frac{aagg + hhbb}{gg} + \frac{2hhbe}{dgg}x + \frac{hhee - ddgg + eegg}{ddgg}xx$ ($= MLq$) $= yy$: æquatio quæ exprimit relationem inter x & y, hoc est inter HM axem sectionis, & ML ordinatim applicatam. Et proinde cum in hac æquatione x & y ad duas tantum dimensiones ascendant, patet figuram INQLK esse conicam sectionem. Utpote si angulus MHG major sit angulo LDF, Ellipsis erit hæc figura; si minor, Hyperbola; si æqualis vel Parabola, vel (coincidentibus insuper punctis C & H) parallelogrammum.

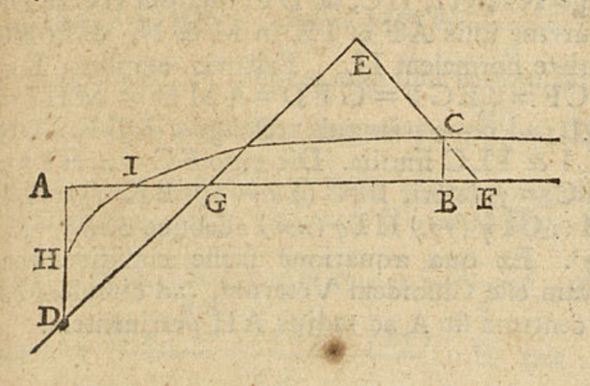
PROB. XXXIV.

Si ad AF erigatur perpendiculum AD datæ longitudinis, & normæ DEF crus unum ED continuo transeat per punctum D dum alterum crus EF æquale AD dilabatur super AF; invenire curvam HIC quam crus EF medio ejus puncto C describit.

SIT EC vel CF $= a$, perpendiculum CB $= y$, AB $= x$, & propter similia triangula FBC, FEG, erit BF ($\sqrt{aa - yy}$.) BC + CF ($y + a$) ::

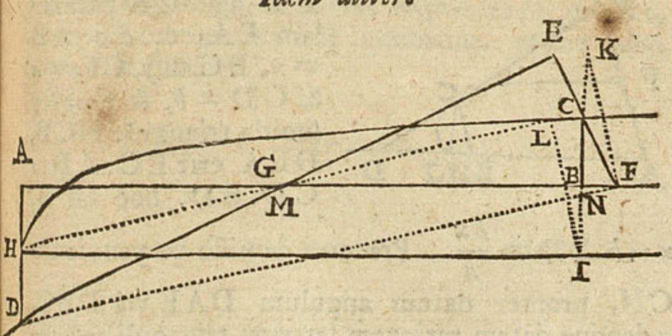
EF

EF ($2a$.) EG + GF (AG + GF) seu AF. Quare



$\frac{2ay + 2aa}{\sqrt{aa - yy}}$ (= AF = AB + BF) $= x + \sqrt{aa - yy}$. Jam multiplicando per $\sqrt{aa - yy}$ fit $2ay + 2aa = aa - yy + x\sqrt{aa - yy}$, seu $2ay + aa + yy = x\sqrt{aa - yy}$, & quadrando partes divisas per $\sqrt{a + y}$, ac ordinando prodit $y^3 + 3ayy \begin{matrix} +3aa \\ +xx \end{matrix} y \begin{matrix} + a^3 \\ - axx \end{matrix} = 0$.

Idem aliter.



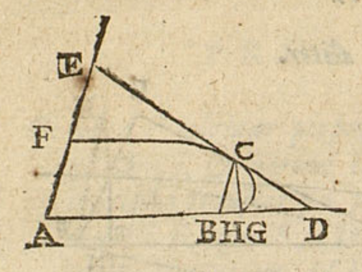
In BC cape hinc inde BI, & CK æquales CF,

 &

& age KF, HI, HC, ac DF; quarum HC ac DF occurrant ipsis AF & IK in M & N, & in HC demitte normalem IL. Eritque angulus K $=$ $\frac{1}{2}$BCF $=$ $\frac{1}{2}$EGF $=$ GFD $=$ AMH $=$ MHI $=$ CIL; adeoque triangula rectangula KBF, FBN, HLI & ILC similia. Dic ergo FC $= a$, HI $= x$, & IC $= y$; & erit BN $(2a - y.)$ BK (y) : : LC. LH : : CIq $(yy.)$ HIq $(xx.)$ adeoque $2axx - yxx = y^3$. Ex qua æquatione facile colligitur hanc curvam esse Cissoidem Veterum, ad circulum cujus centrum sit A ac radius AH pertinentem.

PROB. XXXV.

Si datæ longitudinis recta ED angulum datum EAD subtendens ita moveatur ut termini ejus D & E anguli istius latera AD & AE perpetim contingant; proponatur Curvam FCG determinare quam punctum quodvis C in recta ista ED datum describit.



A Dato puncto C age CB parallelam EA; & dic AB $= x$, BC $= y$, CE $= a$ & CD $= b$, & propter similia triangula DCB, DEA erit EC . AB : : CD . BD. hoc est $a . x : : b . \text{BD} = \frac{bx}{a}$. Præterea demisso perpendiculo CH, propter datum angulum DAE vel DBC, adeoque datam rationem laterum trianguli rectanguli BCH sit $a . e .$: : BC . BH, & erit BH $= \frac{ey}{a}$.

Aufer

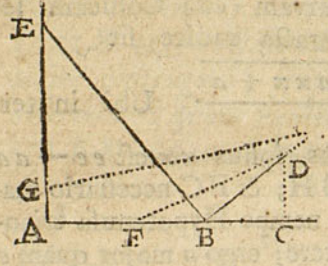
Aufer hanc de BD & reſtabit $HD = \frac{bx - ey}{a}$. Jam in triangulo BCH propter angulum rectum BHC eſt $BCq - BHq = CHq$, hoc eſt $yy - \frac{eeyy}{aa} = CHq$. Similiter in triangulo CDH propter angulum CHD rectum, eſt $CDq - CHq = HDq$, hoc eſt $bb - yy + \frac{eeyy}{aa}$ ($= HDq = \frac{bx - ey}{a}$ quadrato) $= \frac{bbxx - 2bexy + eeyy}{aa}$. Et per reductionem $yy = \frac{2be}{aa}xy + \frac{aabb - bbxx}{aa}$: Ubi cum incognitæ quantitates ſint duarum tantum dimenſionum, patet curvam eſſe Conicam ſectionem. Præterea extracta radice fit $y = \frac{bex \pm b\sqrt{eexx - aaxx + a^4}}{aa}$. Ubi in termino radicali coefficiens ipſius xx eſt $ee - aa$. Atqui erat $a . e :: BC . BH$; & BC neceſſario major eſt linea quam BH, nempe Hypotenuſa trianguli rectanguli major latere; ergo a major quam e, & $ee - aa$ negativa eſt quantitas, atque adeo curva erit Ellipſis.

PROB.

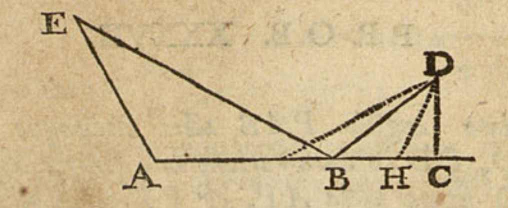
PROB. XXXVI.

Si norma EBD ita moveatur ut ejus crus unum EB continuo subtendat angulum rectum EAB, dum terminus alterius cruris BD describat curvam aliquam lineam FDG; invenire lineam istam FDG quam punctum D describit.

A Puncto D ad latus AC demitte perpendiculum DC; & dictis $AC = x$, & $DC = y$, atque $EB = a$ & $BD = b$; in triangulo BDC propter angulum rectum ad C, est $BCq = BDq - DCq = bb - yy$. Ergo $BC = \sqrt{bb - yy}$ & $AB = x - \sqrt{bb - yy}$. Præterea propter similia triangula BEA. DBC, est BD . DC :: EB . AB . hoc est $b . y :: a . x - \sqrt{bb - yy}$. Quare $bx - b\sqrt{bb - yy} = ay$, sive $bx - ay = b\sqrt{bb - yy}$. Et partibus quadratis ac debite reductis $yy = \frac{2abxy + b^4 - bbxx}{aa + bb}$. Et extracta radice $y = \frac{abx \pm bb\sqrt{aa + bb - xx}}{aa + bb}$. Unde patet iterum Curvam esse Ellipsin.



Hæc ita se habent ubi anguli EBD & EAB recti sunt: Sed si anguli isti sunt alterius cujusvis magnitudinis, dummodo sint æquales, sic procedendum



dendum erit. Demittatur DC perpendicularis ad AC ut ante, & agatur DH constituens angulum DHA æqualem angulo HAE puta obtusum, dictisque EB $= a$, BD $= b$, AH $= x$, & HD $= y$, propter similia triangula EAB, BHD, erit BD. DH :: EB. AB. hoc est $b . y :: a . \text{AB} = \frac{ay}{b}$. Aufer hanc de AH, & restabit BH $= x - \frac{ay}{b}$. Præterea in triangulo DHC propter omnes angulos datos, adeoque datam rationem laterum, assume DH ad HC in ratione quavis data, puta b ad e, & cum DH sit y, erit HC $\frac{ey}{b}$, & HB×HC $= \frac{exy}{b} - \frac{aeyy}{bb}$. Denique per 12. II. Elem. in triangulo BHD est BDq = BHq + DHq + 2BH×HC, hoc est $bb = xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} + yy + \frac{2exy}{b} - \frac{2aeyy}{bb}$. Et extracta radice

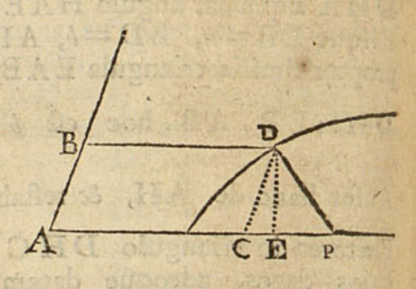
$$x = \frac{ay - ey \pm \sqrt{eeyy - bbyy + bbbb}}{b}.$$

Ubi cum b sit major e hoc est $ee - bb$ negativa quantitas, patet iterum curvam esse Ellipsin.

PROB.

PROB. XXXVII.

In dato angulo PAB actis utcunque rectis BD, PD in data ratione hac semper lege, ut BD sit parallela AP, & PD terminetur ad punctum P in recta AP datum; invenire locum puncti D.



AGE CD parallelam AB & DE perpendicularem AP; ac dic $AP = a$, $CP = x$, & $CD = y$, sitque BD ad PD in ratione d ad e, & erit AC vel $BD = a - x$, & $PD = \frac{ea - ex}{d}$. Sit insuper propter datum angulum DCE, ratio CD ad CE, d ad f, & erit $CE = \frac{fy}{d}$, & $EP = x - \frac{fy}{d}$. Atqui propter angulos ad E rectos est $CDq - CEq$ $(= EDq) = PDq - EPq$, hoc est $yy - \frac{ffyy}{dd}$ $= \frac{eeaa - 2eeax + eexx}{dd} - xx + \frac{2fxy}{d} - \frac{ffyy}{dd}$. Ac deletis utrobiq; $-\frac{ffyy}{dd}$, terminisq; rite dispositis $yy = \frac{2fxy}{d} + \frac{eeaa - 2eeax + eexx - ddxx}{dd}$. Et ex-

tracta radice $y = \dfrac{fx}{d} \pm \dfrac{\sqrt{eeaa - 2eeax + \left(\begin{array}{l} +ee \\ -dd \\ +ff \end{array}\right) xx}}{d}$.

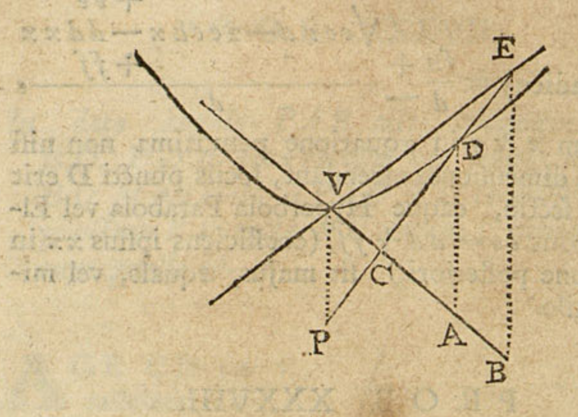
Ubi cum x & y in æquatione penultima non nisi ad duas dimensiones ascendant, locus puncti D erit Conica sectio, eaque Hyperbola Parabola vel Ellipsis prout $ee - dd + ff$, (coefficiens ipsius xx in æquatione posteriori,) sit majus, æquale, vel minus nihilo.

PROB. XXXVIII.

Rectis duabus VE & VC positione datis, & ab alia recta PE circa polum positione datum P vertente sectis utcunque in C & E; si recta intercepta CE dividatur in partes CD, DE rationem datam habentes, proponatur invenire locum puncti D.

AGE VP, eique parallelas DA, EB occurrentes VC in A & B. Dic VP $= a$, VA $= x$, & AD $= y$, & cum detur ratio CD ad DE, vel converse ratio CD ad CE, hoc est ratio DA ad EB, sit ista ratio d ad e, & erit EB $= \frac{ey}{d}$. Prætērea cum detur angulus EVB, adeoque ratio EB ad VB, sit ista ratio e ad f; & erit VB $= \frac{fy}{d}$. Denique propter similia triangula CEB, CDA, CPV,

CPV, est EB . CB : : DA . CA : : VP . VC, &



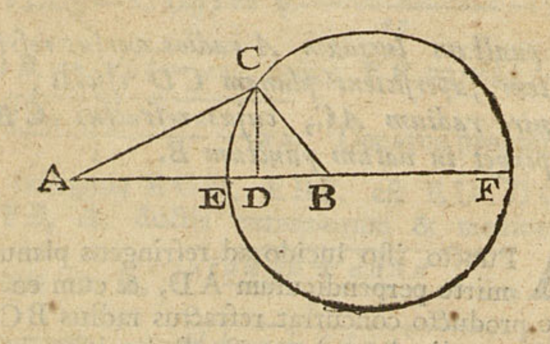
componendo EB + VP . CB + VC : : DA + VP . CA + VC. Hoc est $\frac{ey}{d} + a \,.\, \frac{fy}{d} :: y + a \,.\, x$. Ductisque extremis & mediis in se $eyx + dax = fyy + fay$. Ubi cum indefinitæ quantitates x & y non nisi ad duas dimensiones ascendant, sequitur curvam VD, in qua punctum D perpetim reperitur, esse conicam sectionem, eamque Hyperbolam; quia una ex indefinitis quantitatibus, nempe x est unius tantum dimensionis, & in termino exy multiplicatur per alteram indefinitam quantitatem y.

PROB. XXXIX.

Si rectæ duæ AC, BC à duobus positione datis punctis A & B in data quavis ratione ad tertium quodvis punctum C ducantur; invenire locum puncti concursus C.

JUnge AB; & ad hanc demitte normalem CD: dictisque $AB = a$, $AD = x$, $DC = y$: Erit AC =

$AC=\sqrt{xx+yy}$. $BD=a-x$ & BC $(=\sqrt{BDq+DCq})$ $=\sqrt{xx-2ax+aa+yy}$. Jam cum detur ra-



tio AC ad BC, ſit iſta d ad e; &, extremis & mediis in ſe ductis, erit $e\sqrt{xx+yy}=d\sqrt{xx-2ax+aa+yy}$. Et per reductionem $\sqrt{\frac{ddaa-2ddax}{ee-dd}-xx}=y$. Ubi cum xx ſit negativum, & ſola unitate affectum; atque etiam angulus ADC rectus, patet curvam in qua punctum C locatur eſſe circulum. Nempe in recta AB cape puncta E & F ita ut ſint $d.e::$ AE. BE::AF.BF, & erit EF circuli hujus diameter.

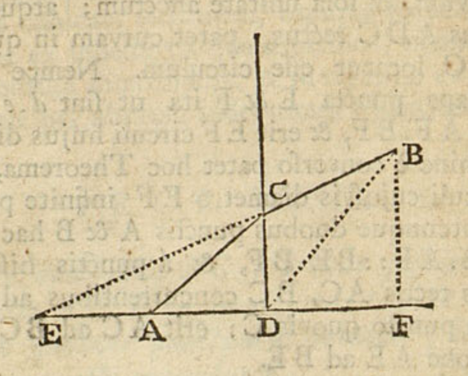
Et hinc è converſo patet hoc Theorema, quod in circuli cujuſvis diametro EF infinite producta datis utcunque duobus punctis A & B hac lege ut ſit AE.AF::BE.BF, & á punctis hiſce actis duabus rectis AC, BC concurrentibus ad circulum in puncto quovis C: erit AC ad BC in data ratione AE ad BE.

PROB.

PROB. XL.

Si punctum lucidum A radios versus refringentem superficiem planam CD ejiciat; invenire radium AC, cujus refractus CB impinget in datum punctum B.

A Puncto isto lucido ad refringens planum demitte perpendiculum AD, & cum eo utrinque producto concurrat refractus radius BC in E, & perpendiculum à puncto B demissum in F, & agatur BD; dictisque $AD = a$, $DB = b$, $BF = c$, $DC = x$, statue rationem sinuum incidentiæ & refractionis, hoc est sinuum angulorum CAD, CED esse d ad e, & cum EC & AC (ut notum est) sint in eadem ratione, & AC sit $\sqrt{aa + xx}$



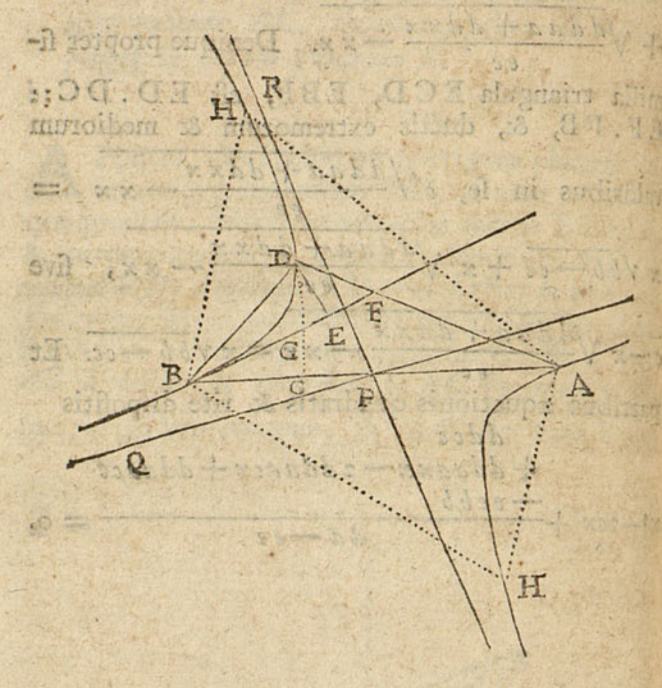
erit

erit $EC = \frac{d}{e}\sqrt{aa+xx}$. Præterea eſt ED $(= \sqrt{ECq - CDq}) = \sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx}$; & $DF = \sqrt{bb-cc}$, atque $EF = \sqrt{bb-cc} + \sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx}$. Denique propter ſimilia triangula ECD, EBF, eſt ED . DC :: EF . FB, &, ductis extremorum & mediorum valoribus in ſe, $c\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx} = x\sqrt{bb-cc} + x\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx}$, ſive $\overline{c-x}\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx} = x\sqrt{bb-cc}$. Et partibus æquationis quadratis & rite diſpoſitis

$$x^4 - 2cx^3 + \frac{\begin{matrix} ddcc \\ + ddaaxx - 2ddaacx + ddaacc \\ - eebb \end{matrix}}{dd-ee} = 0$$

PROB. XLI.

Invenire locum verticis trianguli D, cujus basis AB datur, & anguli ad basem DAB, DBA datam habent differentiam.



UBI angulus ad Verticem, sive (quod perinde est) ubi summa angulorum ad basem datur, docuit Euclides locum verticis esse circumferentiam circuli; proposuimus igitur inventionem loci ubi differentia angulorum ad basem datur. Sit angulus DBA major angulo DAB, sitque ABF eorum data differentia, recta BF occurrente AD in F. Insuper ad BF demittatur normalis DE, ut & ad AB

III. 29. Euclid.

AB normalis DC, occurrens BF in G. Dictisque $AB = a$, $AC = x$, & $CD = y$, erit $BC = a - x$. Jam in triangulo BCG cum dentur omnes anguli dabitur ratio laterum BC & GC; sit ista d ad a, & erit $CG = \frac{aa - ax}{d}$. Aufer hanc de DC sive y & restabit $DG = \frac{dy - aa + ax}{d}$. Præterea propter similia triangula BGC, DGE est BG.BC :: DG.DE. Est autem in triangulo BGC, $a.d$ :: CG.BC. Adeoque $aa.dd :: CGq.BCq$, & componendo $aa + dd.dd :: BGq.BCq$. Et extractis radicibus $\sqrt{aa + dd}.d(:: BG.BC) :: DG.DE$. Ergo $DE = \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}$. Adhæc cum angulus ABF sit differentia angulorum BAD & ABD, adeoque anguli BAD & FBD æquentur, similia erunt triangula rectangula CAD & EBD, & proinde latera proportionalia DA.DC :: DB.DE. Sed est $DC = y$. $DA (= \sqrt{ACq + DCq}) = \sqrt{xx + yy}$. $DB (= \sqrt{BCq + DCq}) = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, & supra erat $DE = \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}$. Quare est

$$\sqrt{xx + yy}.y :: \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}.\frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}.$$

Et extremorum & mediorum quadratis in se ductis

$$aayy - 2axyy + xxyy + y^4 = \frac{ddxxyy + ddy^4}{aa + dd}$$

$$\frac{-2aadxxy - 2aady^3 + 2adyx^3 + 2adxy^3 + a^4xx}{aa + dd}$$

$$\frac{+a^4yy - 2a^3x^3 - 2a^3xyy + aax^4 + aaxxyy}{aa + dd}.$$

Duc omnes terminos in $aa + dd$, & prodeuntes redige in debitum ordinem, & orietur

$$x^4 \begin{matrix} -2a \\ +\frac{2d}{a}y \end{matrix} x^3 \begin{matrix} -2dy \\ +aa \end{matrix} xx \begin{matrix} +\frac{2d}{a}y^3 \\ +\frac{2dd}{a}yy \end{matrix} x \begin{matrix} -ddyy \\ -2dy^3 \\ -y^4 \end{matrix} = 0.$$

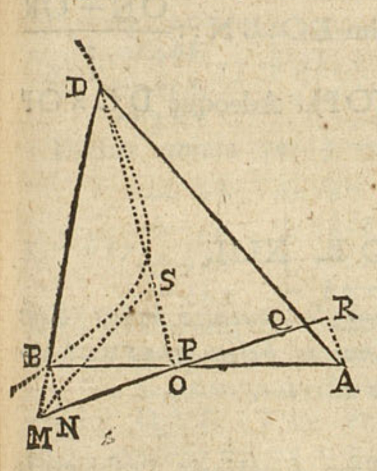
Divide hanc æquationem per $xx - ax \begin{matrix} +dy \\ +yy \end{matrix}$, & orietur $xx \begin{matrix} -a \\ +\frac{2d}{a}y \end{matrix} x \begin{matrix} -yy \\ -dy \end{matrix} = 0$. Duæ itaque prodierunt æquationes in ſolutione hujus Problematis. Prior $xx - ax \begin{matrix} +dy \\ +yy \end{matrix} = 0$ eſt ad circulum, locum nempe puncti D ubi angulus FBD ſumitur ad alias partes rectæ BF quam in figura deſcribitur, exiſtente angulo ABF ſumma angulorum DAB DBA ad baſem, adeoque angulo ADB ad verticem dato. Poſterior $xx \begin{matrix} -a \\ +\frac{2d}{a}y \end{matrix} x \begin{matrix} -yy \\ -dy \end{matrix} = 0$ eſt ad Hyperbolam, locum puncti D ubi angulus FBD ſitum obtinet à recta BF quem in Figura deſcripſimus: hoc eſt ita ut angulus ABF ſit differentia angulorum DAB, DBA ad baſem. Hyperbolæ autem hæc eſt determinatio. Biſeca AB in P. Age PQ conſtituentem angulum BPQ æqualem dimidio anguli ABF. Huic erige normalem PR, & erunt PQ, PR Aſſymptoti hujus Hyperbolæ, & B punctum per quod Hyperbola tranſibit.

Et hinc prodit tale Theorema. Hyperbolæ rectangulæ diametro quavis AB ducta, & à terminis ejus ad Hyperbolæ puncta duo quævis D & H ductis rectis AD, BD, AH, BH; hæ rectæ angulos DAH, DBH ad terminos diametri conſtituent æquales.

Idem

Idem brevius.

Ad Prob. XXIV. *Regulam* de commoda terminorum ad ineundum calculum electione tradidi; ubi obvenit ambiguitas in electione. Hic differentia angulorum ad basem eodem modo se habet ad utrumque angulum; & in constructione Schematis æque potuit addi ad angulum minorem DAB, ducendo ab A rectam ipsi BF parallelam, ac subtrahi ab angulo majori DBA ducendo rectam BF. Quamobrem nec addo nec subtraho, sed dimidium ejus uni angulorum addo, alteri subtraho. Deinde cum etiam ambiguum sit utrum AC vel BC pro termino indefinito cui ordinatim applicata DC insistit adhibeatur, neutrum adhibeo; sed biseco AB in P, & adhibeo PC: vel potius acta MPQ constituente hinc inde angulos APQ, BPM æquales dimidio differentiæ angulorum ab basem, ita ut ea cum rectis AD, BD constituat angulos DQP, DMP æquales; ad MQ demitto normales AR, BN, DO & adhibeo DO pro ordinatim applicata, ac PO pro indefinita linea cui insistit. Voco itaque $PO = x$, $DO = y$, AR vel $BN = b$, & PR vel $PN = c$.



Et propter similia triangula BNM, DOM, erit BN . DO :: MN . MO. Et dividendo, DO — BN $(y-b)$. DO (y) :: MO — MN (ON sive

$c - x$). MO. Quare $MO = \frac{cy - xy}{y - b}$. Similiter ex altera parte propter similia triangula ARQ, DOQ, erit AR.DO::RQ.QO: & componendo DO + AR ($y + b$). DO (y)::QO + RQ (OR sive $c + x$). QO. Quare QO $= \frac{cy + xy}{y + b}$. Denique propter æquales angulos DMQ, DQM æquantur MO & QO, hoc est $\frac{cy - xy}{y - b} = \frac{cy + xy}{y + b}$. Divide omnia per y, & multiplica per denominatores, & orietur $cy + cb - xy - xb = cy - cb + xy - xb$, sive $cb = xy$, notissima æquatio ad Hyperbolam.

Quin etiam locus puncti D sine calculo Algebraico prodire potuit. Est enim ex superioribus DO − BN.ON::DO.MO(QO)::DO + AR.OR. Hoc est DO − BN.DO + BN::ON.OR, & mixtim DO.BN:: $\frac{ON + OR}{2}$ (NP). $\frac{OR - ON}{2}$ (OP). Adeoque DO × OP = BN × NP.

PROB. XLII.

Locum verticis trianguli invenire cujus Basis datur, & angulorum ad basem unus dato angulo differt à duplo alterius.

IN Schemate novissimo superioris Problematis sit ABD triangulum istud, AB basis bisecta in P, APQ vel BPM triens anguli dati, quo angulus DBA excedit duplum anguli DAB: & angulus

angulus D M Q erit duplus anguli D Q M. Ad MQ demitte perpendicula AR, BN, DO; & angulum DMQ biſeca recta MS occurrente DO in S; & erunt triangula DOQ, SOM ſimilia; adeoque O Q . O M : : O D . O S, & dividendo O Q − O M . O M : : S D . O S : : (per 3. VI. Elem.) DM . OM Quare (per 9. V. Elem.) OQ − OM = D M. Dictis jam P O = x, O D = y, A R vel B N = b, & P R vel P N = c, erit ut in ſuperiori Problemate OM = $\frac{cy - xy}{y - b}$, & O Q = $\frac{cy + xy}{y + b}$, adeoque O Q − O M = $\frac{-2bcy + 2xyy}{yy - bb}$. Pone jam $DOq + OMq = DMq$, hoc eſt $yy + \frac{cc - 2cx + xx}{yy - 2by + bb}yy = \frac{4bbcc - 8bcxy + 4xxyy}{y^4 - 2bbyy + b^4}yy$. Et per debitam reductionem orietur tandem

$$y^4 * \begin{matrix} +cc \\ -2bb \\ -2cx \\ -3xx \end{matrix} yy \begin{matrix} +2bxx \\ +4bcx \\ +2bcc \end{matrix} y \begin{matrix} +b^4 \\ -3bbcc \\ -2bbcx \\ +bbxx \end{matrix} = 0.$$

Divide omnia per $y - b$, & evadet

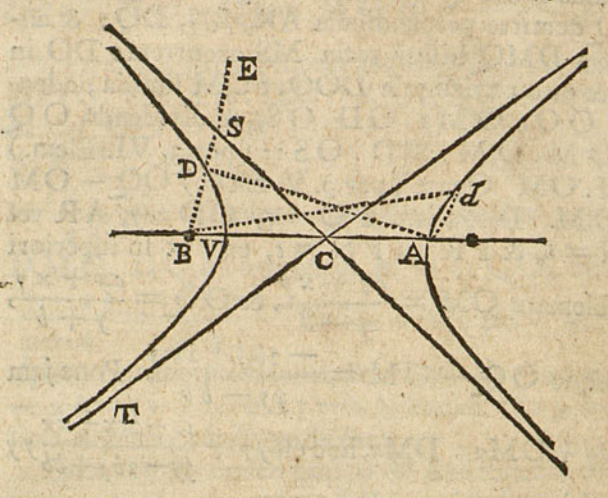
$$y^3 + byy \begin{matrix} -bb \\ +cc \\ -2cx \\ -3xx \end{matrix} y \begin{matrix} -b^3 \\ +3bcc \\ +2bcx \\ -bxx \end{matrix} = 0.$$

Quare punctum D eſt ad Curvam trium dimenſionum; quæ tamen evadit Hyperbola ubi angulus B P M ſtatuitur nullus, ſive angulorum ad baſem unus D B A duplus alterius D A B. Tunc enim B N, ſive b evaneſcente, æquatio fiet $yy = 3xx + 2cx - cc$.

Ex hujus autem æquationis conſtructione tale elicitur Theorema. Si centro C, Aſymptotis C S, C T, angulum S C T 120 graduum continentibus deſcribatur Hyperbola quævis D V, cujus ſemi-

M 4 axes

axes sint CV, CA; produc CV ad B, ut sit

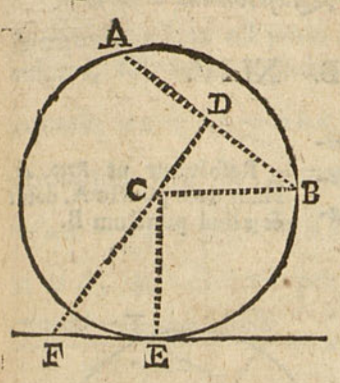


VB = VC, & ab A & B actis utcunque rectis AD, BD concurrentibus ad Hyperbolam, erit angulus BAD dimidium anguli ABD, triens vero anguli ADE quem recta AD comprehendit cum BD producta. Hoc intelligendum est de Hyperbola quæ transit per punctum V. Quod si ab iisdem punctis A & B actæ rectæ A*d*, B*d* conveniant ad conjugatam Hyperbolam quæ transit per A: tunc externorum angulorum trianguli ad basem, ille ad B erit duplus alterius ad A.

PROB. XLIII.

Circulum per data duo puncta describere qui rectam positione datam continget.

SUnto A & B puncta data, & EF recta positione data, & requiratur circulum ABE, per ista puncta describere qui contingat rectam istam FE. Junge AB, & eam biseca in D. Ad D erige normalem



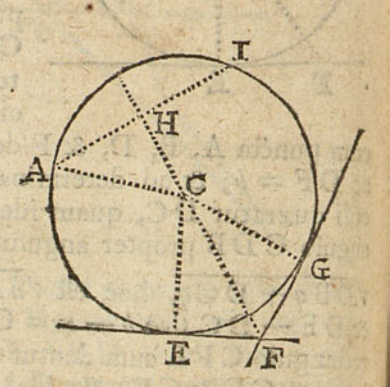
malem D F occurrentem rectæ F E in F, & circuli centrum incidet in hanc novissime ductam D F, puta in C. Junge ergo C B; & ad F E demitte CE normalem, eritque E punctum contactus, ac C B, C E æquales inter se, utpote radii circuli quæsiti. Jam cum puncta A, B, D, & F dentur, esto DB = a, ac D F = b; & ad determinandum centrum circuli quæratur D C, quam ideo dic x. Jam in triangulo C D B propter angulum ad D rectum, est $\sqrt{DBq + DCq}$, hoc est $\sqrt{aa + xx}$ = C B. Est & D F — D C sive $b - x$ = C F. Et in triangulo rectangulo C F E cum dentur anguli, dabitur ratio laterum C F & C E; sit ista d ad e; & erit C E $= \frac{e}{d} \times$ C F hoc est $= \frac{eb - ex}{d}$. Pone jam C B & CE, (radios nempe circuli quæsiti,) æquales inter se, & habebitur æquatio $\sqrt{aa + xx} = \frac{eb - ex}{d}$. Cujus partibus quadratis & multiplicatis per dd, oritur $aadd + ddxx = eebb - 2eebx + eexx$. Sive $xx = \frac{-2eebx - aadd + eebb}{dd - ee}$. Et extracta radice, $x = \frac{-eeb + d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}$. Inventa est ergo longitudo D C adeoque centrum C, quo circulus per puncta A & B describendus est ut contingat rectam F E.

PROB.

PROB. XLIV.

Circulum per datum punctum describere qui rectas duas positione datas continget.

Resolvitur ut *Prop.* 43. Nam dato puncto A, datur & aliud punctum B.



ESto datum punctum A, & sint E F, F G rectæ duæ positione datæ, & A E G circulus quæsitus easdem contingens, ac transiens per punctum istud A. Recta C F bisecetur angulus EFG & centrum circuli in ipsa reperietur. Sit istud C; & ad E F & F G demissis perpendiculis C E, C G erunt E ac G puncta contactus. Jam in triangulis C E F, C G F, cum anguli ad E & G, sint recti, & anguli ad F semisses sint anguli E F G, dantur omnes anguli adeoque ratio laterum C F & C E vel C G. Sit ista d ad e, & si ad determinandum centrum circuli quæsiti C, assumatur $CF = x$, erit C E vel $CG = \frac{ex}{d}$. Præterea ad F C demitte normalem A H, & cum punctum A detur, dabuntur etiam rectæ A H & F H. Dicantur istæ a & b, & ab F H sive b ablato F C sive x restabit $CH = b - x$. Cujus quadrato $bb - 2bx + xx$ adde quadratum ipsius A H, sive aa & summa $aa + bb - 2bx + xx$, erit ACq per 47. I. Elem. siquidem angulus A H C ex Hypothesi sit rectus. Pone jam radios circuli A C & C G inter

se

ſe æquales; hoc eſt pone æqualitatem inter eorum valores, vel inter quadrata eorum, & habebitur æquatio $aa + bb - 2bx + xx = \frac{eexx}{dd}$. Aufer utrobique xx, & mutatis omnibus ſignis erit $-aa - bb + 2bx = xx - \frac{eexx}{dd}$. Duc omnia in dd, ac divide per $dd - ee$, & evadet $\frac{-aadd - bbdd + 2bddx}{dd - ee} = xx$. Cujus æquationis extracta radix eſt $x = \frac{bdd - d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}$. Inventa eſt itaque longitudo FC, adeoque punctum C, quod centrum eſt circuli quæſiti.

Si inventus valor x ſive FC auferatur de b ſive HF, reſtabit $HC = \frac{-eeb + d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}$, eadem æquatio quæ in priori problemate prodiit, ad determinandum longitudinem DC.

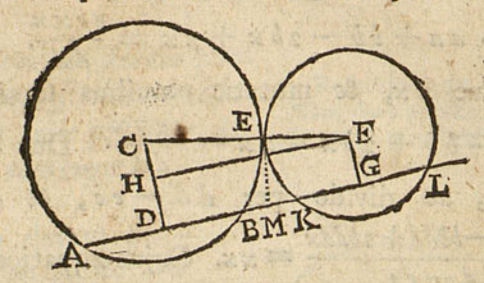
PROB. XLV.

Vide *Prop.* 21.

Circulum per data duo puncta deſcribere, qui alium circulum poſitione datum continget.

SInt A, B puncta data, EK circulus poſitione & magnitudine datus, F centrum ejus, ABE circulus quæſitus per puncta A & B tranſiens, ac tangens alterum circulum in E, & C centrum ejus. Ad AB productum demitte perpendicula CD, & FG & age CF, ſecantem circulos in puncto contactus E, ac age etiam FH parallelam DG, & occurrentem CD in H. His conſtructis dic AD vel

vel DB $= a$, DG vel HF $= b$, GF $= c$, & EF (radium nempe circuli dati) $= d$, atque DC $= x$:



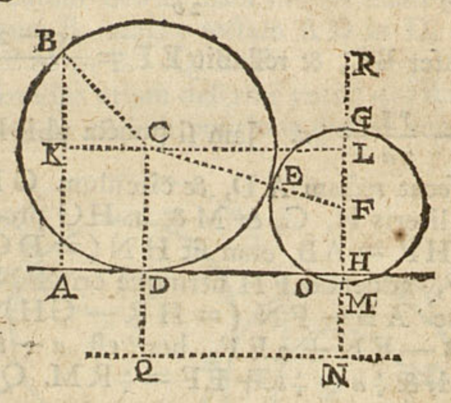
& erit CH ($=$ CD $-$ FG) $= x - c$, & CFq ($=$ CHq $+$ HFq) $= xx - 2cx + cc + bb$, atque CBq ($=$ CDq $+$ DBq) $= xx + aa$, adeoque CB vel CE $= \sqrt{xx + aa}$. Huic adde EF, & habebitur CF $= d + \sqrt{xx + aa}$, cujus quadratum $dd + aa + xx + 2d\sqrt{xx + aa}$, æquatur valori ejusdem CFq prius invento, nempe $xx - 2cx + cc + bb$. Aufer utrobique xx, & restabit $dd + aa + 2d\sqrt{xx + aa} = cc + bb - 2cx$. Aufer insuper $dd + aa$, & habebitur $2d\sqrt{xx + aa} = cc + bb - dd - aa - 2cx$. Jam, abbreviandi causa, pro $cc + bb - dd - aa$, scribe $2gg$, & habebitur $2d\sqrt{xx + aa} = 2gg - 2cx$, sive $d\sqrt{xx + aa} = gg - cx$. Et partibus æquationis quadratis, erit $ddxx + ddaa = g^4 - 2ggcx + ccxx$. Utrinque aufer $ddaa$ & $ccxx$, & restabit $ddxx - ccxx = g^4 - ddaa - 2ggcx$. Et partibus æquationis divisis per $dd - cc$, habebitur $xx = \frac{g^4 - ddaa - 2ggcx}{dd - cc}$. Atque per extractionem radicis affectæ $x = \frac{-ggc + \sqrt{g^4dd - d^4aa + ddaacc}}{dd - cc}$.

Inventa

Inventa igitur x, sive longitudine DC, biseca AB in D, & ad D erige perpendiculum DC $= \frac{-ggc + d\sqrt{g^4 - aadd + aacc}}{dd - cc}$. Dein centro C per punctum A vel B describe circulum ABE; nam hic continget alterum circulum EK, & transibit per utrumque punctum A, B. Q.E.F.

PROB. XLVI.

Circulum per datum punctum describere qui datum circulum, & rectam lineam positione datam continget.

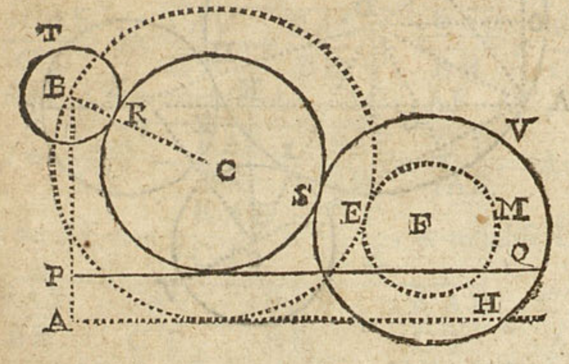


SIT circulus iste describendus BD, ejus centrum C, punctum per quod describi debet B, recta quam continget AD, punctum contactus D, circulus quem continget GEM, ejus centrum F, & punctum contactus E. Junge CB, CD, CF, & CD erit perpendicularis ad AD, atque CF secabit circulos in puncto contactus E. Produc CD ad Q ut sit DQ = EF & per Q age QN parallelam AD. Denique à B & F ad AD & QN demitte perpendicula BA, FN, & à C ad AB & FN perpendicula

pendicula CK, CL. Et cum sit $BC = CD$ vel AK, erit BK ($= AB - AK$) $= AB - BC$, adeoque $BKq = ABq - 2AB \times BC + BCq$. Aufer hoc de BCq, & restabit $2AB \times BC - ABq$, pro quadrato de CK. Est itaque $AB \times \overline{2BC - AB} = CKq$; & eodem argumento erit $FN \times \overline{2FC - FN} = CLq$, atque adeo $\frac{CKq}{AB} + AB = 2BC$, & $\frac{CLq}{FN} + FN = 2FC$. Quamobrem si pro AB, CK, FN, KL, & CL, scribas a, y, b, c, & $c - y$, erit $\frac{yy}{2a} + \frac{1}{2}a = BC$, & $\frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b = FC$. De FC aufer BC, & restabit $EF = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{yy}{2a} - \frac{1}{2}a$. Jam si puncta ubi FN producta secat rectam AD, & circulum GEM notentur literis H, G, & M & in HG producta capiatur $HR = AB$, cum sit HN ($= DQ = EF$) $= GF$, addendo FH utrinque erit $FN = GH$, adeoque $AB - FN$ ($= HR - GH$) $= GR$, & $AB - FN + 2EF$, hoc est $a - b + 2EF = RM$, & $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + EF = \frac{1}{2}RM$. Quare cum supra fuerit $EF = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{yy}{2a} - \frac{1}{2}a$, si hoc scribatur pro EF habebitur $\frac{1}{2}RM = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} - \frac{yy}{2a}$. Dic ergo RM d, & erit $d = \frac{cc - 2cy + yy}{b} - \frac{yy}{a}$. Duc omnes terminos in a & b, & orietur $abd = acc - 2acy + ayy - byy$. Aufer utrinque $acc - 2acy$, & restabit $abd - acc + 2acy = ayy - byy$. Divide per

per $a-b$, & orietur $\frac{abd-acc+2acy}{a-b}=yy$. Et extracta radice $y=\frac{ac}{a-b}\pm\sqrt{\frac{aabd-abbd+abcc}{aa-2ab+bb}}$. Quæ conclusiones sic abbreviari possunt. Pone $c.b::d.e$, dein $a-b.a::c.f$; & erit $fe-fc+2fy=yy$, sive $y=f\pm\sqrt{ff+fe-fc}$. Invento y sive KC vel AD, cape AD $=f\pm\sqrt{ff+fe-fc}$, ad D erige perpendiculum DC ($=$ BC) $=\frac{KCq}{2AB}+\frac{1}{2}AB$, & centro C, intervallo CB vel CD describe circulum BDE, nam hic transiens per datum punctum B, tanget rectam AD in D, & circulum GEM in E. Q. E. F.

Hinc circulus etiam describi potest qui duos datos circulos, & rectam positione datam continget.

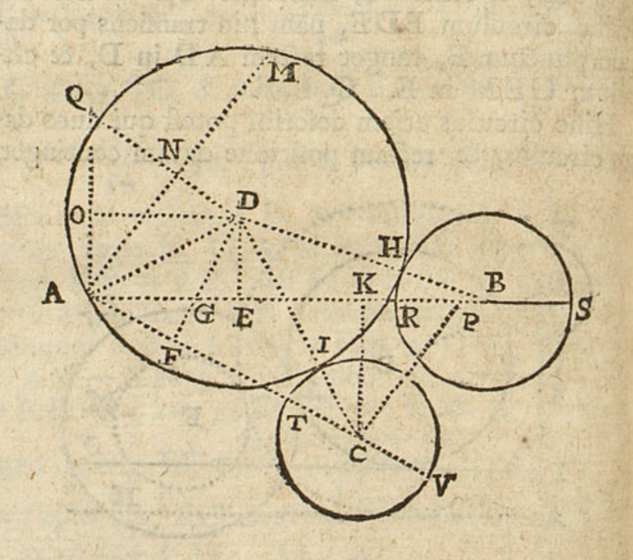


Sint enim circuli dati RT, SV, eorum centra B, F, & recta positione data PQ. Centro F, radio FS $-$ BR describe circulum EM. A puncto B, ad rectam PQ demitte perpendiculum BP, & producto eo ad A ut sit PA $=$ BR per A age AH parallelam PQ, & circulus describatur qui transeat per

per punctum B, tangatque rectam AH, & circulum EM. Sit ejus centrum C; junge BC secantem circulum RT in R, & eodem centro C, radio vero CR descriptus circulus RS tanget circulos RT, SV, & rectam PQ, ut ex constructione manifestum est.

PROB. XLVII.

Circulum describere qui per datum punctum transibit, & alios duos positione, & magnitudine datos circulos continget.



ESto punctum datum A, sintque circuli positione, & magnitudine dati TIV, RHS, centra eorum C & B, circulus describendus AIH centrum ejus D, & puncta contactus I & H. Junge AB, AC, AD, DB, secetque AB producta circulum RHS in punctis R & S, & AC, producta circulum

lum TIV in T & V. Et à punctis D & C demissis perpendiculis DE ad AB, & DF ad AC occurrente AB in G, atque CK ad AB; in triangulo ADB erit $ADq - DBq + ABq = 2AE \times AB$, per 13. II. Elem. Sed $DB = AD + BR$, adeoque $DBq = ADq + 2AD \times BR + BRq$. Aufer hoc de $ADq + ABq$, & restabit $ABq - 2AD \times BR - BRq$, pro $2AE \times AB$. Est & $ABq - BRq = \overline{AB - BR} \times \overline{AB + BR} = AR \times AS$. Quare $AR \times AS - 2AD \times BR = 2AE \times AB$. Et

$$\frac{AR \times AS - 2AB \times AE}{BR} = 2AD.$$

Et simili ratiocinio in triang. ADC emerget iterum

$$2AD = \frac{TAV - 2CAF}{CT}.\ \text{Quare}\ \frac{RAS - 2BAE}{BR} = \frac{TAV - 2CAF}{CT}.\ \text{Et}\ \frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} = \frac{2CAF}{CT}.\ \text{Et}\ \overline{\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR}} \times \frac{CT}{2AC}$$

$= AF$. Unde cum sit AK . AC : : AF . AG, erit

$$AG = \overline{\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR}} \times \frac{CT}{2AK}.$$

Aufer hoc de AE sive $\frac{2KAE}{CT} \times \frac{CT}{2AK}$, & restabit GE

$$= \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT}} \times \frac{CT}{2AK}.$$

Unde cum sit KC . AK : : GE . DE; erit

$$DE = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}.$$

In AB cape AP quæ sit ad AB ut CT ad BR, & erit $\frac{2PAE}{CT} = \frac{2BAE}{BR}$, adeoque $\frac{2PK \times AE}{CT}$

$= 2BAE$

$= \frac{2BAE}{BR} - \frac{2KAE}{CT}$, adeoque

$DE = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2PK \times AE}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$. Ad AB erige ergo perpendiculum $AQ = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$, & in eo cape $QO = \frac{PK \times AE}{KC}$, & erit $AO = DE$.

Junge DO, DQ, CP, & triangula DOQ, CKP erunt similia, quippe quorum anguli ad O & K sunt recti, & latera (KC . PK : : AE, vel DO . QO) proportionalia. Anguli ergo OQD, KPC æquales sunt, & proinde QD perpendicularis est ad CP. Quamobrem si agatur AN parallela CP, & occurrens QD in N, angulus ANQ erit rectus, & triangula AQN, PCK similia; adeoque PC . KC : : AQ . AN. Unde cum AQ sit $\overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$, AN erit $\overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2PC}$. Produc AN ad M ut sit NM = AN, & erit AD = DM, adeoque circulus quæsitus transibit per punctum M. Cum ergo punctum M datum sit, ex his, sine ulteriori Analysi, talis emergit Problematis resolutio.

In AB cape AP, quæ sit ad AB ut CT ad BR; junge CP eique parallelam age AM, quæ sit ad $\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}$, ut CT ad PC: & ope *Prob.* 45. per puncta A & M describe circulum AIHM qui tangat alterutrum circulorum TIV, RHS, & idem circulus tanget utrumque. Q. E. F.

Et

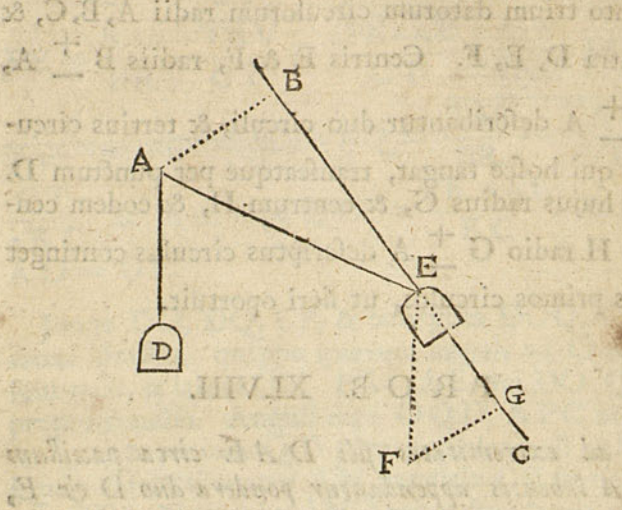
Et hinc circulus etiam describi potest qui tres circulos positione & magnitudine datos continget. Sunto trium datorum circulorum radii A, B, C, & centra D, E, F. Centris E & F, radiis $B \pm A$, $C \pm A$ describantur duo circuli, & tertius circulus qui hosce tangat, transeatque per punctum D. Sit hujus radius G, & centrum H, & eodem centro H radio $G \pm A$ descriptus circulus continget tres primos circulos, ut fieri oportuit.

PROB. XLVIII.

Si ad extremitates fili D A E circa paxillum A labentis appendantur pondera duo D & E, quorum pondus E labitur per lineam obliquam B G: Invenire locum ponderis E, ubi pondera hæc in æquilibrio consistunt.

PUta factum, & ipsi AD age parallelam EF quæ sit ad A E, ut pondus E ad pondus D. Et à punctis A & F ad lineam BG demitte perpendicula AB, FG. Jam cum pondera ex Hypothesi sint ut lineæ AE, EF, exponantur pondera per lineas istas, pondus D per lineam AE, & pondus E per lineam E F. Ergo Corpus E proprii ponderis vi directa E F tendit versus F, & vi obliqua EG tendit versus G. Et idem Corpus E, ponderis D vi directa A E, trahitur versus A, & vi obliqua BE, trahitur versus B. Cum itaque pondera se mutuo sustineant in æquilibrio, vis qua pondus E trahitur versus B æqualis esse debet vi contrariæ qua tendit versus G, hoc est B E æqualis esse debet ipsi E G. Jam vero datur ratio AE ad EF ex

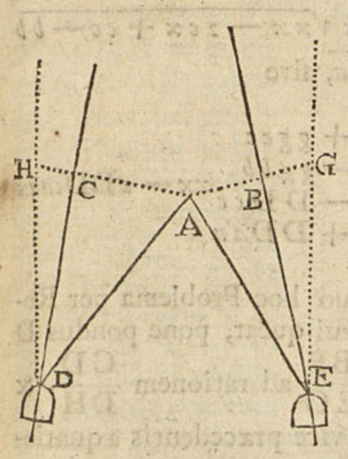
Hypothesi, & propter datum angulum FEG datur etiam ratio FE ad EG cui BE æqualis est. Ergo



datur ratio AE ad BE. Datur etiam AB longitudine. Et inde triangulum ABE, & punctum E facile dabitur. Nempe dic $AB = a$, $BE = x$, & erit $AE = \sqrt{aa + xx}$, sit insuper AE ad BE in data ratione d ad e, & erit $e\sqrt{aa + xx} = dx$. Et partibus æquationis quadratis & reductis, $eeaa = ddxx - eexx$, sive $\frac{ea}{\sqrt{dd - ee}} = x$. Inventa est igitur longitudo BE quæ determinat locum ponderis E. Q. E. F.

Quod si pondus utrumque per lineam obliquam descendat, Computum sic institui potest. Sint CD, BE obliquæ lineæ positione datæ per quas pondera ista D & E descendunt. A paxillo A ad has lineas demitte perpendicula AC, AB, iisque productis occurrant in punctis G & H lineæ EG, DH,

DH, à ponderibus perpendiculariter ad Horizontem erectæ, & vis qua pondus E conatur descendere juxta lineam perpendicularem, hoc est tota gravitas ipsius E erit ad vim qua pondus idem conatur descendere juxta lineam obliquam BE ut GE ad BE, atque vis qua conatur juxta lineam istam obliquam BE descendere erit ad vim qua conatur juxta lineam AE descendere, hoc est ad vim qua filum AE distenditur ut BE ad AE. Adeoque gravitas ipsius E, erit ad tensionem fili AE ut GE ad AE. Et eadem ratione gravitas ipsius D erit ad tensionem fili AD ut HD ad AD. Sit itaque fili totius DA + AE longitudo c, sitque pars ejus AE $= x$, & erit altera pars AD $= c - x$. Et quoniam est $AEq - ABq = BEq$, & $ADq - ACq = CDq$, sit insuper AB $= a$, & AC $= b$, & erit



$BE = \sqrt{xx - aa}$ & $CD = \sqrt{xx - 2cx + cc - bb}$. Adhæc cum triangula BEG, CDH, dentur specie, sit $BE . EG :: f . E$, & $CD . DH :: f . g$, & erit $EG = \frac{E}{f}\sqrt{xx - aa}$, & $DH = \frac{g}{f}\sqrt{xx - 2cx + cc - bb}$

Quamobrem cum sit GE . AE :: pondus E . tensionem AE. Et HD . AD :: pondus D . tensionem AD, & tensiones istæ æquentur inter se, erit

$\frac{E}{f} \frac{Ex}{\sqrt{xx - aa}}$ = tensioni AE = tensioni AD

 = Dc

$= \dfrac{Dc - Dx}{\frac{g}{f}\sqrt{xx - 2cx + cc - bb}}$. Cujus æquationis reductione provenit $gx\sqrt{xx - 2cx + cc - bb} = \overline{Dc - Dx}\sqrt{xx - aa}$, sive

$$\begin{matrix} gg \\ -DD \end{matrix}\, x^4 \begin{matrix} -2ggc \\ +2DDc \end{matrix}\, x^3 \begin{matrix} +ggcc \\ -ggbb \\ -DDcc \\ +DDaa \end{matrix}\, xx - 2DDcaax$$

$+ DDccaa = 0.$

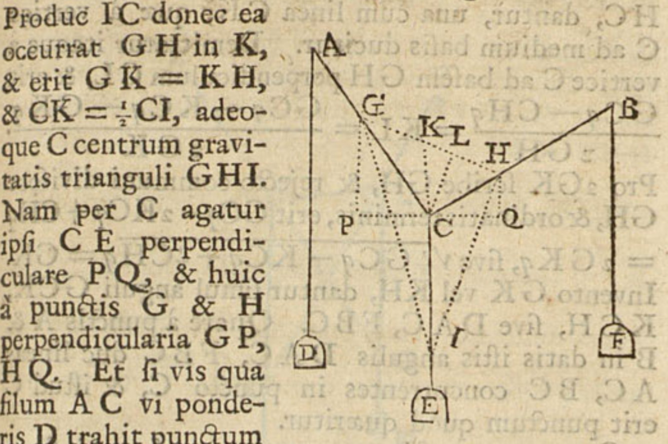
Si casum desideras quo hoc Problema per Regulam & circinum construi queat, pone pondus D ad pondus E ut ratio $\frac{BE}{EG}$ ad rationem $\frac{CD}{DH}$, & evadet $g = D$, adeoque vice præcedentis æquationis habebitur hæc $\begin{matrix} aa \\ -bb \end{matrix}\, xx - 2aacx + aacc = 0$; sive $x = \dfrac{ac}{a + b}$.

PROB. XLIX.

Si ad filum D A C B F circa paxillos duos A, B, labile appendantur tria pondera D, E, F; D & F ad extremitates fili & E ad medium ejus punctum C, inter paxillos positum: Ex datis ponderibus & situ paxillorum invenire situm puncti C, ad quod medium pondus appenditur ubi pondera consistunt in æquilbrio.

CUM tensio fili AC æquetur tensioni fili AD, & tensio fili BC tensioni fili BF, tensiones filorum AC, BC, EC erunt ut pondera D, F, E. In

In eadem ponderum ratione cape partes filorum CG, CH, CI. Compleatur triangulum GHI. Produc IC donec ea occurrat GH in K, & erit GK = KH, & CK = $\frac{1}{2}$CI, adeoque C centrum gravitatis trianguli GHI. Nam per C agatur ipsi CE perpendiculare PQ, & huic à punctis G & H perpendicularia GP, HQ. Et si vis qua filum AC vi ponderis D trahit punctum C versus A, exponatur per lineam GC, vis qua filum istud trahet idem punctum versus P exponetur per lineam CP, & vis qua trahit illud versus K exponetur per lineam GP. Et similiter vires quibus filum BC vi ponderis F, trahit idem punctum C versus B, Q & K, exponentur per lineas CH, CQ, HQ; & vis qua filum CE vi ponderis E, trahit punctum illud C versus E, exponetur per lineam CI. Jam cum punctum C viribus æquipollentibus sustineatur in æquilibrio, summa virium quibus fila AC & BC, simul trahunt punctum C versus K, æqualis erit vi contrariæ qua filum EC, trahit punctum illud versus E, hoc est summa GP + HQ, æqualis erit ipsi CI; & vis qua filum AC trahit punctum C versus P, æqualis erit vi contrariæ qua filum BC, trahit idem punctum C versus Q, hoc est linea PC æqualis lineæ CQ. Quare cum PG, CK & QH parallelæ sint, erit etiam



$$GK = KH, \ \& \ CK \left(= \frac{GP + HQ}{2}\right) = \tfrac{1}{2}CI.$$

Quod erat ostendendum. Restat itaque triangulum GCH determinandum, cujus latera GC & HC, dantur, una cum linea CK, quæ à vertice C ad medium basis ducitur. Demittatur itaque à vertice C ad basem GH perpendiculum CL, & erit

$$\frac{GCq - CHq}{2GH} = KL = \frac{GCq - KCq - GKq}{2GK}.$$

Pro 2GK scribe GH, & rejecto communi divisore GH, & ordinatis terminis, erit $GCq - 2KCq + CHq = 2GKq$, sive $\sqrt{\frac{1}{2}GCq - KCq + \frac{1}{2}CHq} = GK$. Invento GK vel KH, dantur simul anguli GCK, KCH, sive DAC, FBC. Quare à punctis A & B in datis istis angulis DAC, FBC duc lineas AC, BC concurrentes in puncto C, & istud C erit punctum quod quæritur.

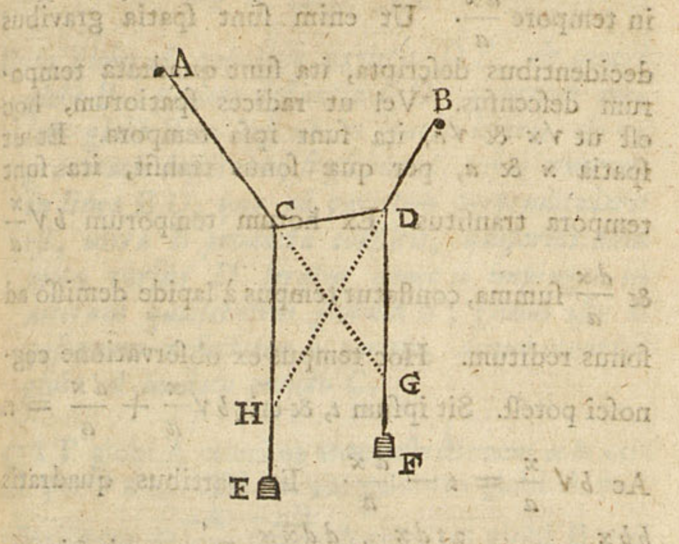
Cæterum quæstiones omnes quæ sunt ejusdem generis non semper opus est per Algebram sigillatim solvere, sed ex solutione unius plerumque consectatur solutio alterius. Ut si jam proponeretur hæc quæstio.

Filo ACDB in datas partes AC, CD, DB diviso & extremitatibus ejus ad paxillos duos A, B positione datos ligatis, si ad puncta divisionum C ac D appendantur pondera duo E & F; ex dato pondere F, & situ punctorum C ac D, cognoscere pondus E.

Ex præcedentis Problematis solutione satis facile colligetur hæcce solutio hujus. Produc lineas AC, BD, donec occurrant lineis DF, CE in G & H; & erit pondus E ad pondus F ut DG ad CH.

Et

Et hinc obiter patet ratio componendi ſtate-



ram ex ſolis filis, qua pondus corporis cujuſvis E, ex unico dato pondere F cognoſci poteſt.

PROB. L.

Lapide in puteum decidente, ex ſono lapidis fundum percutientis, altitudinem putei cognoſcere.

SIT altitudo putei x, & ſi lapis motu uniformiter accelerato deſcendat per ſpatium quodlibet datum a in tempore dato b, & ſonus motu uniformi tranſeat per idem ſpatium datum a in tempore dato d, lapis deſcendet per ſpatium x, in tempore $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, ſonus autem qui fit à lapide in fundum putei impingente aſcendet per idem ſpatium x, in

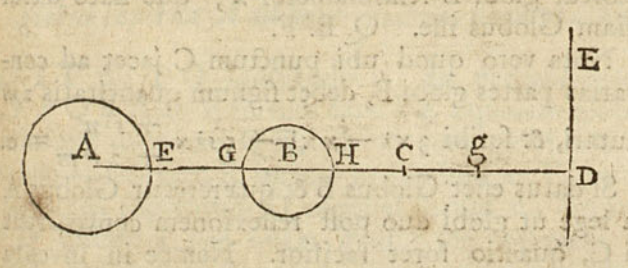
in tempore $\frac{dx}{a}$. Ut enim ſunt ſpatia gravibus decidentibus deſcripta, ita ſunt quadrata temporum deſcenſus. Vel ut radices ſpatiorum, hoc eſt ut $\sqrt{x}$ & $\sqrt{a}$, ita ſunt ipſa tempora. Et ut ſpatia x & a, per quæ ſonus tranſit, ita ſunt tempora tranſitus. Ex horum temporum $b\sqrt{\frac{x}{a}}$ & $\frac{dx}{a}$ ſumma, conflatur tempus à lapide demiſſo ad ſonus reditum. Hoc tempus ex obſervatione cognoſci poteſt. Sit ipſum t, & erit $b\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{dx}{a} = t$. Ac $b\sqrt{\frac{x}{a}} = t - \frac{dx}{a}$. Et partibus quadratis $\frac{bbx}{a} = tt - \frac{2tdx}{a} + \frac{ddxx}{aa}$. Et per reductionem $xx = \frac{2adt + abb}{dd}x - \frac{aatt}{dd}$. Et extracta radice $x = \frac{adt + \frac{1}{2}abb}{dd} - \frac{ab}{2dd}\sqrt{bb + 4dt}$.

PROB.

PROB. LI.

Dato globo A, positione parietis DE, & centri globi B à pariete distantia BD; invenire molem globi B ea lege ut in spatiis liberis, & vi gravitatis destitutis, si globus A, cujus centrum in linea BD, quæ ad parietem perpendicularis est, ultra B producta consistit, uniformi cum motu versus D feratur donec is impingat in alterum quiescentem globum B; globus iste B postquam reflectitur à pariete, denuo occurrat globo A in dato puncto C.

SIT globi A celeritas ante reflectionem a & erit per PROB. XII. p. 92. celeritas globi A post reflexionem $= \frac{aA - aB}{A + B}$, & celeritas globi B post reflexionem $= \frac{2aA}{A + B}$. Ergo celeritas globi A ad celeritatem globi B est ut A — B ad 2 A. In GD cape gD = GH diametro nempe globi B, & cele-



ritates istæ erunt ut GC ad Gg + gC. Nam ubi Globus A impegit in globum B, punctum G quod in superficie globi B existens movetur in linea AD, perget per spatium Gg antequam globus ille B impinget in parietem, & per spatium gC postquam à

pariete

pariete reflectitur; hoc est per totum spatium $Gg + gC$, in eodem tempore quo globi A punctum F perget per spatium GC, eo ut globus uterque rursus conveniant & in se mutuo impingant in puncto dato C. Quamobrem cum dentur intervalla BC & CD, dic $BC = m$, $BD + CD = n$, & $BG = x$, & erit $GC = m + x$, & $Gg + gC = GD + DC - 2gD = GB + BD + DC - 2GH = x + n - 4x$, seu $= n - 3x$. Supra erat $A - B$ ad $2A$ ut celeritas globi A ad celeritatem globi B, & celeritas globi A ad celeritatem globi B ut GC ad $Gg + gC$, adeoque $A - B$ ad $2A$ ut GC ad $Gg + gC$, ergo cum sit $GC = m + x$, & $Gg + gC = n - 3x$, erit $A - B$ ad $2A$ sicut $m + x$ ad $n - 3x$. Porro globus A est ad globum B ut cubus radii ejus AF ad cubum radii alterius GB, hoc est si ponas radium AF esse s, ut s^3 ad x^3. Ergo $s^3 - x^3 . 2s^3 (:: A - B . 2A) :: m + x . n - 3x$. Et ductis extremis & mediis in se habebitur æquatio $s^3n - 3s^3x - nx^3 + 3x^4 = 2ms^3 + 2xs^3$. Et per reductionem $3x^4 - nx^3 - 5s^3x \begin{array}{l} + s^3n \\ - 2s^3m \end{array} = 0$. Cujus æquationis constructione dabitur globi B semidiameter x; quo dato datur etiam Globus ille. Q. E. F.

Nota vero quod ubi punctum C jacet ad contrarias partes globi B, debet signum quantitatis $2m$ mutari, & scribi $3x^4 - nx^3 - 5s^3x \begin{array}{l} + s^3n \\ + 2s^3m \end{array} = 0$.

Si datus esset Globus B & quæreretur Globus A ea lege ut globi duo post reflexionem convenirent in C, quæstio foret facilior. Nempe in inventa æquatione novissima supponendum esset x dari & s quæri. Qua ratione per debitam reductionem illius æquationis, translatis terminis $-5s^3x + s^3n - 2s^3m$ ad æquationis partem contrariam ac divisa utraque parte per $5x - n + 2m$, emergeret

$3x^4 -$

$\frac{3x^4 - nx^3}{5x - n + 2m} = s^3$. Ubi per ſolam extractionem radicis cubicæ obtinebitur *s*.

Quod ſi dato Globo utroq; quæreretur punctum C in quo poſt reflexionem ambo in ſe mutuo impingerent: Cum ſupra fuerit A — *b* ad 2 A ut GC ad G*g* + *g* C ergo invertendo & componendo 3 A — B erit ad A — B ut 2 G*g* ad diſtantiam quæſitam GC.

PROB. LII.

Si globi duo A & B tenui jungantur filo PQ, & pendente globo B à globo A, ſi demittatur globus A, ita ut globus uterque ſimul ſola gravitatis vi in eadem linea perpendiculari PQ cadere incipiat; dein globus inferior B, poſtquam à fundo ſeu plano horizontali FG ſurſum reflectitur, ſuperiori decidenti globo A occurrat in puncto quodam D: Ex data fili longitudine PQ, & puncti illius D à fundo diſtantia DF, invenire altitudinem PF, à qua globus ſuperior A ad hunc effectum demitti debet.

SIT fili PQ longitudo *a*. In perpendiculo PQRF ab F ſurſum cape FE æqualem globi inferioris diametro QR, ita ut cum globi illius punctum infimum R incidit in fundum ad F, punctum ejus ſupremum Q occupet locum E; ſitque ED diſtantia per quam globus ille poſtquam à fundo reflectitur aſcendendo tranſit antequam globo ſuperiori decidenti occurrat in puncto D. Igitur ob datam puncti D à fundo diſtantiam DF, globique inferioris diametrum EF, dabitur eorum differentia DE. Sit ea = *b*. Sitque altitudo per quam globus ille inferior antequam impingit in fundum

fundum cadendo describit R F vel Q E = x, siquidem ea ignoretur. Et invento x si eidem addantur E F & P Q habebitur altitudo P F, à qua globus superior ad effectum desideratum demitti debet.

Cum igitur sit P Q = a, & Q E = x, erit P E = $a + x$. Aufer D E seu b, & restabit P D = $a + x - b$. Est autem tempus descensus globi A ut radix spatii cadendo descripti seu $\sqrt{a + x - b}$, & tempus descensus globi alterius B ut radix spatii cadendo descripti, seu $\sqrt{x}$, & tempus ascensus ejusdem ut differentia radicis illius & radicis spatii quod cadendo tantum à Q ad D describeretur. Nam hæc differentia est ut tempus descensus à D ad E, quod æquale est tempori ascensus ab E ad D. Est autem differentia illa $\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Unde tempus descensus & ascensus conjunctim erit ut $2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Quamobrem cum hoc tempus æquetur tempori descensus globi superioris erit $\sqrt{a + x - b} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Cujus æquationis partibus quadratis habebitur $a + x - b = 5x - b - 4\sqrt{xx - bx}$, seu $a = 4x - 4\sqrt{xx - bx}$, & ordinata æquatione $4x - a = 4\sqrt{xx - bx}$. Cujus partes iterum quadrando oritur $16xx - 8ax + aa = 16xx - 16bx$, seu $aa = 8ax - 16bx$. Et divisis omnibus per $8a - 16b$, fiet $\frac{aa}{8a - 16b} = x$. Fac igitur ut $8a - 16b$ ad a ita a ad x, & habebitur x seu Q E. Q. E. I.

Quod

Quod si ex dato QE quæreretur fili longitudo PQ seu a; eadem æquatio $aa = 8ax - 16bx$ extrahendo affectam radicem quadraticam daret $a = 4x - \sqrt{16xx - 16bx}$. Id est si sumas QY mediam proportionalem inter QD & QE, erit PQ $= 4$EY. Nam media illa proportionalis erit $\sqrt{x \times \overline{x - b}}$, seu $\sqrt{xx - bx}$ quod subductum de x, seu QE relinquit EY, cujus quadruplum est $4x - 4\sqrt{xx - bx}$.

Sin vero ex datis tum QE seu x tum fili longitudine PQ seu a, quæreretur punctum D in quo globus superior in inferiorem incidit; puncti illius à dato puncto E distantia DE seu b, è præcedente æquatione $aa = 8ax - 16bx$, eruetur transferendo aa & $16bx$ ad æquationis partes contrarias cum signis mutatis, & omnia dividendo per $16x$. Orietur enim $\frac{8ax - aa}{16x} = b$. Fac igitur ut $16x$, ad $8x - a$ ita a ad b, & habebitur b seu DE.

Hactenus suppofui globos tenui filo connexos simul dimitti. Quod si nullo connexi filo diversis temporibus dimittantur, ita ut globus superior A verbi gratia prius dimissus, descenderit per spatium PT antequam globus alter incipiat cadere, & ex datis distantiis PT, PQ ac DE quæratur altitudo PF à qua globus superior dimitti debet ea lege ut in inferiorem incidat ad punctum D; sit PQ $= a$, DE $= b$, PT $= c$, & QE $= x$, & erit PD $= a + x - b$ ut supra. Et tempora quibus globus superior cadendo describat spatia PT ac TD, & globus inferior prius cadendo dein reascendendo describat summam spatiorum QE + ED erunt ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{PD} - \sqrt{PT}$, & $2\sqrt{QE} - \sqrt{QD}$ hoc est ut $\sqrt{c}$, $\sqrt{a + x - b} - \sqrt{c}$, & $2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. At ultima duo tempora, propterea quod spatia TD, & QE + ED simul

simul describuntur, æqualia sunt. Ergo $\sqrt{a+x-b} - \sqrt{c} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$. Et partibus quadratis $a+c-2\sqrt{ca+cx-cb} = 4x - 4\sqrt{xx-bx}$. Pone $a+c=e$, & $a-b=f$, & erit per debitam reductionem $4x-e+2\sqrt{cf+cx} = 4\sqrt{xx-bx}$, & partibus quadratis $ee-8ex+16xx+4cf+4cx+16x-4e\sqrt{cf+cx} = 16xx-16bx$. Ac deletis utrobique $16xx$ & pro $ee+4cf$ scripto m nec non pro $8e-16b-4c$ scripto n, habebitur per debitam reductionem $\overline{16x-4e}\sqrt{cf+cx} = nx-m$. Et partibus quadratis $256cfxx+256cx^3-128cefx-128cexx+16ceef+16ceex = nnxx-2mnx$

$$+256cf$$

$+mm$. Et ordinata æquatione

$$\begin{array}{l} 256cx^3 \begin{array}{l} -128cexx \\ -nn \end{array} \begin{array}{l} -128cef \\ +16ceex \\ +2mn \end{array} \begin{array}{l} +16ceef \\ -mm \end{array} = 0. \end{array}$$

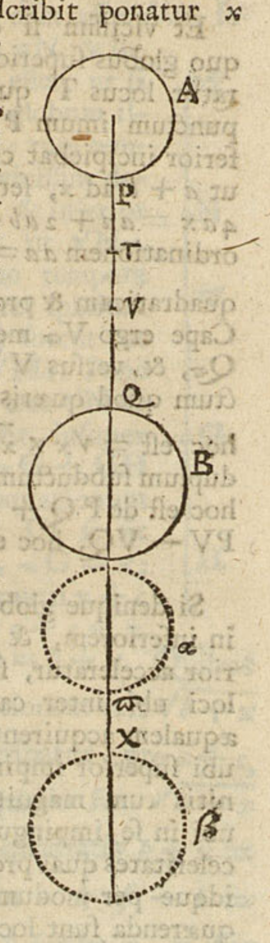
Cujus æquationis constructione dabitur x seu QE, cui si addas datas distantias PQ, & EF habebitur altitudo PF quam oportuit invenire.

PROB. LIII.

Si globi duo quiescentes superior A, & inferior B diversis temporibus dimittantur; & globus inferior eo temporis momento cadere incipiat ubi superior cadendo jam descripsit spatium PT; invenire loca α, β quæ globi illi cadentes occupabunt ubi eorum intervallum ϖχ dato æquale est.

CUM dentur distantiæ PT, PQ, & ϖχ dic primam a, secundam b, tertiam c, & pro Pϖ seu spatio quod globus superior antequam pervenit ad locum

locum quæſitum α cadendo deſcribit ponatur x. Jam tempora quibus globus ſuperior deſcribit ſpatia PT, $P\varpi$, $T\varpi$, & inferior ſpatium $Q\chi$ ſunt, ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{P\varpi}$, $\sqrt{P\varpi} - \sqrt{PT}$, & $\sqrt{Q\chi}$. Quorum temporum poſteriora duo, eo quod globi cadendo ſimul deſcribant ſpatia $T\varpi$ & $Q\chi$, ſunt æqualia. Unde & $\sqrt{P\varpi} - \sqrt{PT}$ æquale erit $\sqrt{Q\chi}$. Erat $P\varpi = x$, & $PT = a$, & ad $P\varpi$ addendo $\varpi\chi$ ſeu c & à ſumma auferendo PQ ſeu b habebitur $Q\chi = x + c - b$. Quamobrem his ſubſtitutis fiet $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{x + c - b}$. Et æquationis partibus quadratis orietur $x + a - 2\sqrt{ax} = x + c - b$. Ac deleto utrobique x, & ordinata æquatione habebitur $a + b - c = 2\sqrt{ax}$. Et partibus quadratis erit quadratum de $a + b - c$ æquale $4ax$, & quadratum illud diviſum per $4a$ æquale x, ſeu $4a$ ad $a + b - c$ ſicut $a + b - c$ ad x. Ex invento autem x ſeu $P\varpi$ datur globi ſuperioris decidentis locus quæſitus α. Et per locorum diſtantiam ſimul datur etiam locus inferioris β.



Et hinc ſi punctum quæratur ubi globus ſuperior cadendo tandem impinget in inferiorem; ponendo diſtantiam $\varpi\chi$ nullam eſſe ſeu delendo c, dic $4a$ ad $a + b$ ut $a + b$ ad x, ſeu $P\varpi$, & punctum ϖ erit quod quæris.

Et vicissim si detur punctum illud ϖ vel χ in quo globus superior incidit in inferiorem, & quæratur locus T quem superioris globi decidentis punctum imum P tunc occupabat cum globus inferior incipiebat cadere; quoniam est $4a$ ad $a+b$ ut $a+b$ ad x, seu ductis extremis & mediis in se $4ax = aa + 2ab + bb$, & per æquationis debitam ordinationem $aa = 4ax - 2ab - bb$; extrahe radicem quadraticam & proveniet $a = 2x - b - 2\sqrt{xx - bx}$. Cape ergo V$\varpi$ mediam proportionalem inter Pϖ & Qϖ, & versus V cape VT = VQ, & erit T punctum quod quæris. Nam Vϖ erit $= \sqrt{P\varpi \times Q\varpi}$ hoc est $= \sqrt{x \times \overline{x-b}}$ seu $= \sqrt{xx - bx}$; cujus duplum subductum de $2x - b$, seu de $2P\varpi - PQ$, hoc est de $PQ + 2Q\varpi$ relinquit $PQ - 2VQ$ seu $PV - VQ$, hoc est PT.

Si denique globorum, postquam superior incidit in inferiorem, & impetu in se invicem facto inferior acceleratur, superior retardatur, desiderantur loci ubi inter cadendum distantiam datæ rectæ æqualem acquirent: Quærendus erit primo locus ubi superior impingit in inferiorem; dein ex cognitis tum magnitudinibus globorum tum eorum ubi in se impingunt celeritatibus inveniendæ sunt celeritates quas proxime post reflexionem habebunt, idque per modum Prob. XII. pag. 92. Postea quærenda sunt loca summa ad quæ globi celeritatibus hisce si sursum ferantur ascenderent, & inde cognoscentur spatia quæ globi datis temporibus post reflexionem cadendo describent, ut & differentia spatiorum: & vicissim ex assumpta illa differentia, per Analysin regredietur ad ipsa spatia cadendo descripta.

Ut si globus superior incidit in inferiorem ad punctum ϖ, & post reflexionem celeritas superioris

deor-

deorsum tanta sit, ut si sursum esset ascendere faceret globum illum per spatium ϖN, & inferioris celeritas deorsum tanta esset, ut si sursum esset, ascendere faceret globum illum inferiorem per spatium ϖM; tum tempora quibus globus superior vicissim descenderet per spatia $N\varpi$, NG, & inferior per spatia $M\varpi$, MH, forent ut $\sqrt{N\varpi}$, $\sqrt{NG}$, $\sqrt{M\varpi}$, $\sqrt{MH}$, adeoque tempora quibus globus superior conficeret spatium ϖG, & inferior spatium ϖH, forent ut $\sqrt{NG} - \sqrt{N\varpi}$, ad $\sqrt{MH} - \sqrt{M\varpi}$. Pone hæc tempora æqualia esse, & erit $\sqrt{NG} - \sqrt{N\varpi} = \sqrt{MH} - \sqrt{M\varpi}$. Et insuper cum detur distantia GH pone $\varpi G + GH = \varpi H$. Et harum duarum æquationum reductione solvetur problema. Ut si sit $M\varpi = a$, $N\varpi = b$, $GH = c$, $\varpi G = x$; erit juxta posteriorem æquationem $x + c = \varpi H$. Adde $M\varpi$ fiet $MH = a + c + x$. Ad ϖG adde $N\varpi$, & fiet $NG = b + x$. Quibus inventis, juxta priorem æquationem erit $\sqrt{b+x} - \sqrt{b} = \sqrt{a+c+x} - \sqrt{a}$. Scribatur e pro $a + c$, & $\sqrt{f}$ pro $\sqrt{a} - \sqrt{b}$: & æquatio fiet $\sqrt{b+x} = \sqrt{e+x} - \sqrt{f}$. Et partibus quadratis $b + x = e + x + f - 2\sqrt{ef+fx}$, seu $e + f - b = 2\sqrt{ef+fx}$. Pro $e + f - b$ scribe g, & fiet $g = 2\sqrt{ef+fx}$, & partibus quadratis $gg = 4ef + 4fx$, & per reductionem $\frac{gg}{4f} - e = x$.

PROB. LIV.

Si duo sint globi A, B quorum superior A ab altitudine G decidens, in alterum inferiorem B à fundo H versus superiora resilientem incidat, & hi globi ita per reflexionem ab invicem denuo recedant ut globus A vi reflexionis illius ad altitudinem priorem G redeat, idque eodem tempore quo globus inferior B ad fundum H revertitur; dein globus A rursus decidat, & in globum B à fundo resilientem denuo incidat, idque in eodem loco AB ubi prius in ipsum incidebat; & sic perpetuo globi ab invicem resiliant rursusque ad eundem locum redeant: Ex datis globorum magnitudinibus, positione fundi & loco G à quo globus superior decidit, invenire locum ubi globi in se mutuo impingent.

SIT e centrum globi A, & f centrum globi B, d centrum loci G in quo globus superior in maxima est altitudine, g centrum loci globi inferioris ubi in fundum impingit, a semidiameter globi A, b semidiameter globi B, c punctum contactus globorum in se mutuo impingentium, & H punctum contactus globi inferioris & fundi. Et celeritas globi A, ubi in globum B impingit, ea erit quæ generatur casu globi ab altitudine de, adeoque est ut $\sqrt{de}$. Hac eadem celeritate reflecti debet globus A versus superiora ut ad locum priorem G redeat. Et globus B eadem celeritate deorsum reflecti debet qua ascenderat ut eodem tem-

pore

pore redeat ad fundum quo inde recesserat. Ut autem hæc duo eveniant, globorum motus inter reflectendum æquales esse debent. Motus autem ex globorum celeritatibus & magnitudinibus componuntur, adeoque quod fit ex globi unius mole & celeritate æquale erit ei quod fit ex globi alterius mole & celeritate. Unde si factum ex unius globi mole & celeritate dividatur per molem alterius globi, habebitur celeritas alterius globi proxime ante & post reflexionem, seu sub fine ascensus & initio descensus. Erit igitur hæc celeritas ut $\frac{A\sqrt{de}}{B}$, seu cum globi sint ut cubi radiorum ut $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. Ut autem hujus celeritatis quadratum ad quadratum celeritatis globi A proxime ante reflexionem, ita altitudo ad quam globus B hac celeritate, si occursu gobi A in eum decidentis non impediretur, ascenderet, ad altitudinem ed à qua globus A descendit. Hoc est ut $\frac{Aq}{Bq}de$ ad de seu ut Aq ad Bq vel a^6 ad b^6 ita altitudo illa prior ad x, si modo pro altitudine posteriore cd ponatur x. Ergo hæc altitudo, ad quam nimirum B si non impediretur ascenderet, est $\frac{a^6}{b^6}x$. Sit ea fK. Ad fK adde fg, seu $dH - de - ef - gH$, hoc est $p - x$ si modo pro dato $dH - ef - gH$ scribas p,

& x pro incognito de & habebitur $Kg = \frac{a^6}{b^6} x + p - x$. Unde celeritas globi B ubi decidit à K ad fundum, hoc est ubi decidit per spatium Kg, quod centrum ejus inter decidendum describeret erit ut $\sqrt{\frac{a^6}{b^6} x + p - x}$. At globus ille decidit à loco Bcf ad fundum eodem tempore quo globus superior A ascendit à loco Ace ad summam altitudinem d, aut vicissim descendit à d ad locum Ace, & proinde cum gravium cadentium celeritates æqualibus temporibus æqualiter augeantur, celeritas globi B descendendo ad fundum tantum augebitur quanta est celeritas tota quam globus A eodem tempore cadendo à d ad e acquirat vel ascendendo ab e ad d amittat. Ad celeritatem itaque quam globus B habet in loco Bcf adde celeritatem quam globus A habet in loco Ace, & summa, que est ut $\sqrt{de} + \frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, seu $\sqrt{x} + \frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$, erit celeritas globi B ubi is in fundum incidit. Proinde $\sqrt{x} + \frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$ æquabitur $\sqrt{\frac{a^6}{b^6} x + p - x}$. Pro $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$ scribe $\frac{r}{s}$ & pro $\frac{a^6 - b^6}{b^6}$, $\frac{rt}{ss}$ & æquatio illa fiet $\frac{r}{s}\sqrt{x} = \sqrt{\frac{rt}{ss} x + p}$, & partibus quadratis $\frac{rr}{ss} x = \frac{rt}{ss} x + p$. Aufer utrobique $\frac{rt}{ss} x$, duc omnia in ss ac divide per $rr - rt$, & orietur $x = \frac{ssp}{rr - rt}$. Quæ quidem æquatio prodiisset

sim-

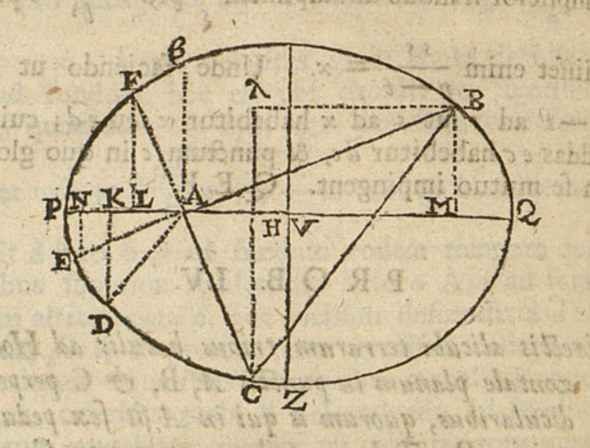
ſimplicior ſi modo aſſumpſiſſem $\frac{p}{s}$ pro $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$, prodiiſſet enim $\frac{ss}{p - t} = x$. Unde faciendo ut ſit $p - t$ ad s ut s ad x habebitur x ſeu ed; cui ſi addas ec habebitur dc, & punctum c in quo globi in ſe mutuo impingent. Q. E. F.

PROB. LV.

Erectis alicubi terrarum tribus baculis ad Horizontale planum in punctis A, B, & C perpendicularibus, quorum is qui in A ſit ſex pedum, qui in B octodecim pedum, & qui in C octo pedum, exiſtente linea AB triginta trium pedum; contingit quodam die extremitatem umbræ baculi A, tranſire per puncta B & C, baculi autem B per A & C, ac baculi C per punctum A. Quæritur declinatio ſolis & elevatio Poli, ſive dies locuſque ubi hæc evenerint?

QUoniam umbra baculi cujuſque deſcripſit Conicam ſectionem, ſectionem nempe Coni radioſi cujus vertex eſt baculi ſummitas; fingam BCDEF, eſſe hujuſmodi curvam (ſive ea ſit Hyperbola, Parabola vel Ellipſis) quam umbra baculi A eo die deſcripſit, ponendo AD, AE, AF ejus umbras fuiſſe cum BC, BA, CA reſpective fuerunt umbræ baculorum B & C. Et præterea fingam PAQ eſſe lineam Meridionalem ſive axem hujus curvæ ad quem demiſſæ perpendiculares BM, CH, DK, EN, & FL, ſunt ordinatim applicatæ. Has vero ordinatim applicatas indefinite deſignabo litera y, & axis partes interceptas AM, AH, AK,

AN, & AL litera *x*. Fingam denique æquationem



$aa \perp bx \perp cxx = yy$, ipsarum *x* & *y* relationem (*i.e.* naturam Curvæ) designare, assumendo *aa*, *b* & *c* tanquam cognitas ut ex Analysi tandem inveniantur. Ubi incognitas quantitates *x* & *y*, duarum tantum dimensionum posui quia æquatio est ad Conicam sectionem; & ipsius *y* dimensiones impares omisi quia ipsa est ordinatim applicata ad axem. Signa autem ipsorum *b* & *c*, quia indeterminata sunt designavi notula $\perp$ quam indifferenter pro $+$ aut $-$ usurpo, & ejus oppositum $\top$ pro signo contrario. At signum quadrati *aa* affirmativum posui, quia baculum A umbras in adversas plagas (C & F, B & E) projicientem concava pars curvæ necessario complectitur, & proinde si ad punctum A erigatur perpendiculum Aβ, hoc alicubi occurret curvæ puta in β, hoc est, ordinatim applicata *y*, ubi *x* nullum est, erit reale. Nam inde sequitur quadratum ejus, quod in eo casu est *aa*, affirmativum esse.

Constat itaque quod æquatio hæc fictitia $aa \perp bx \perp cxx = yy$, sicut terminis superfluis non referta sic neque restrictior est quam ut ad omnes hujus pro-

problematis conditiones se extendat, Hyperbolam, Ellipsin vel Parabolam quamlibet designatura prout ipsorum aa, b, c, valores determinabuntur, aut nulli forte reperientur. Quid autem valent, quibusque signis b & c debent affici, & inde quænam sit hæc curva ex sequenti Analysi constabit.

Analyseos pars prior.

Cum umbræ sint ut altitudines baculorum erit BC . AD : : AB . AE (: : 18 . 6.) : : 3 . 1. Item CA . AF (: : 8 . 6.) : : 4 . 3. Quare nominatis $AM = r$, $MB = s$, $AH = t$, & $HC = +\, v$. Ex similitudine triangulorum AMB, ANE, & AHC, ALF erunt $AN = -\frac{r}{3}$. $NE = -\frac{s}{3}$. $AL = -\frac{3t}{4}$. Et $LF = \mp\frac{3v}{4}$: Quarum signa signis ipsarum AM, MB, AH, HC contraria posui quia tendunt ad contrarias plagas respectu puncti A à quo ducuntur, axisve PQ cui insistunt. His autem pro x & y in æquatione fictitia $aa + bx + cxx = yy$, respective scriptis,

r & s dabunt $aa + br + crr = ss$.

$-\frac{r}{3}$ & $-\frac{s}{3}$ dabunt $aa \mp \frac{br}{3} + \frac{1}{9}crr = \frac{1}{9}ss$.

t & $+\, v$ dabunt $aa + bt + ctt = vv$.

$-\frac{3}{4}t$ & $\mp\frac{3}{4}v$ dabunt $aa \mp \frac{3}{4}bt + \frac{9}{16}ctt = \frac{9}{16}vv$.

Jam è prima & secunda harum exterminando ss ut obtineatur r, prodit $\frac{2aa}{+\, b} = r$. Unde patet $+\, b$ esse affirmativum. Item è tertia & quarta exterminando vv ut obtineatur t prodit $\frac{aa}{3b} = t$. Et scriptis in-

super

super $\frac{2aa}{b}$ pro r in prima, & $\frac{aa}{3b}$ pro t in tertia, oriuntur $3aa + \frac{4a^4c}{bb} = ss$, & $\frac{4}{3}aa + \frac{a^4c}{9bb} = vv$.

Porro demissa Bλ perpendiculari in CH, erit BC. AD (:: 3. 1.) :: Bλ. AK :: Cλ. DK. Quare cum sit Bλ ($= AM - AH = r - t$) $= \frac{5aa}{3b}$, erit AK $= \frac{5aa}{9b}$, vel potius $= -\frac{5aa}{9b}$. Item cum sit Cλ ($= CH + BM = v + s$) $= \sqrt{\frac{4aa}{3} + \frac{a^4c}{9bb}} + \sqrt{3aa + \frac{4a^4c}{bb}}$, erit DK ($= \frac{1}{3}C\lambda$) $= \sqrt{\frac{4aa}{27} + \frac{a^4c}{81bb}} + \sqrt{\frac{1}{3}aa + \frac{4a^4c}{9bb}}$. Quibus in æquatione $aa + bx + cxx = yy$, pro AK ac DK sive x, & y respective scriptis, prodit $\frac{4aa}{9} + \frac{25a^4c}{81bb} = \frac{13}{27}aa + \frac{37a^4c}{81bb} + 2\sqrt{\frac{4aa}{27} + \frac{a^4c}{81bb}} \times \sqrt{\frac{aa}{3} + \frac{4a^4c}{9bb}}$. Et per reductionem $-bb - 4aac = +2\sqrt{36b^4 + 51aabbc + 4a^4cc}$, & partibus quadratis iterumque reductis, exit $0 = 143b^4 + 196aabbc$, sive $\frac{-143bb}{196aa} = +c$. Unde constat $+c$ negativam esse, adeoque æquationem fictitiam $aa + bx + cxx = yy$, hujus esse formæ $aa + bx - cxx = yy$, & ideo curvam quam designat Ellipsin esse. Ejus vero centrum & axes duo sic eruuntur.

Ponendo $y = 0$, sicut in Figuræ verticibus P & Q contingit, habebitur $aa + bx = cxx$, & extra-

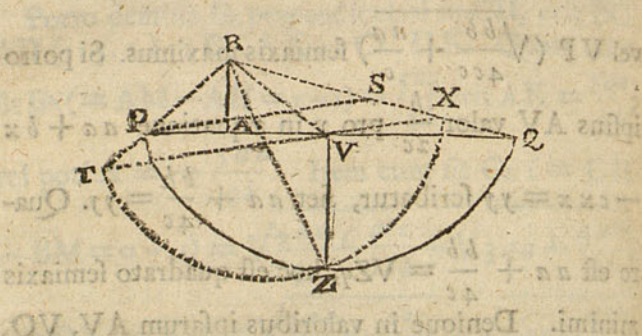
cta radice, $x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}} = \frac{AQ}{AP}$. Adeoque sumpto $AV = \frac{b}{2c}$, erit V centrum Ellipsis, & VQ vel VP $(\sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}})$ semiaxis maximus. Si porro ipsius AV valor $\frac{b}{2c}$ pro x in æquatione $aa + bx - cxx = yy$ scribatur, fiet $aa + \frac{bb}{4c} = yy$. Quare est $aa + \frac{bb}{4c} = VZq$, hoc est quadrato semiaxis minimi. Denique in valoribus ipsarum AV, VQ, VZ jam inventis, scripto $\frac{143\,bb}{196\,aa}$ pro c, exeunt $\frac{98\,aa}{143\,b} = AV$, $\frac{112\,aa\sqrt{3}}{143\,b} = VQ$, & $\frac{8\,a\sqrt{3}}{\sqrt{143}} = VZ$.

Analyseos pars altera.

Supponatur jam baculum puncto A insistens esse AR, & erit RPQ planum meridionale ac RPZQ conus radiosus cujus vertex est R. Sit insuper TXZ planum secans Horizontem in VZ, ut & meridionale planum in TVX, quæ sectio sit ad axem mundi conive perpendicularis, & ipsum planum TXZ erit ad eundem axem perpendiculare, & conum secabit in peripheria circuli TZX, quæ ab ejus vertice pari ubique intervallo RX, RZ, RT distabit. Quamobrem si PS ipsi TX parallela ducatur, fiet RS = RP propter æquales RX, RT; nec non SX = XQ propter æquales PV, VQ. Unde est RX vel RZ $(= \frac{RS + RQ}{2}) = \frac{RP + RQ}{2}$.

Deni-

Denique ducatur RV, & cum VZ perpendiculariter insistat plano RPQ, (sectio utique existens planorum eidem perpendiculariter insistentium) fiet triangulum RVZ rectangulum ad V.



Dictis jam RA $= d$, AV $= e$, VP vel VQ $= f$, & VZ $= g$, erit AP $= f - e$, & RP $= \sqrt{ff - 2ef + ee + dd}$. Item AQ $= f + e$, & RQ $= \sqrt{ff + 2ef + ee + dd}$: adeoque RZ $\left(= \frac{RP + RQ}{2}\right)$

$$= \frac{\sqrt{ff - 2ef + ee + dd} + \sqrt{ff + 2ef + ee + dd}}{2}.$$

Cujus quadratum $\frac{dd + ee + ff}{2} +$ $\frac{1}{2}\sqrt{f^4 - 2eeff + e^4 + 2ddff + 2ddee + d^4}$, est æquale ($RVq + VZq = RAq + AVq + VZq =$) $dd + ee + gg$. Jam reductione facta est $\sqrt{f^4 - 2eeff + e^4 + 2ddff + 2ddee + d^4}$ $= dd + ee - ff + 2gg$, & partibus quadratis ac in ordinem redactis, $ddff = ddgg + eegg - ffgg + g^4$, sive $\frac{ddff}{gg} = dd + ee - ff + gg$. Denique 6, $\frac{98\,aa}{143\,b}$, $\frac{112\,aa\sqrt{3}}{143\,b}$, & $\frac{8\,a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$ (valoribus ipsorum AR, AV,

VQ,

VQ, & VZ) pro d, e, f, ac g restitutis, oritur $36 - \frac{196a^4}{143bb} + \frac{192aa}{143} = \frac{36 \times 14 \times 14aa}{143bb}$, & inde per reductionem $\frac{49a^4 + 36 \times 49aa}{48aa + 1287} = bb$.

In primo Schemate est $AMq + MBq = ABq$, hoc est $rr + ss = 33 \times 33$. Erat autem $r = \frac{2aa}{b}$, & $ss = 3aa - \frac{4a^4c}{bb}$, unde $rr = \frac{4a^4}{bb}$, & (substituto $\frac{143bb}{196aa}$ pro c) $ss = \frac{4aa}{49}$ Quare $\frac{4a^4}{bb} + \frac{4aa}{49} = 33 \times 33$, & inde per reductionem iterum resultat $\frac{4 \times 49a^4}{53361 - 4aa} = bb$. Ponendo igitur æqualitatem inter duo bb, & dividendo utramque partem æquationis per 49 fit $\frac{a^4 + 36aa}{48aa + 1287} = \frac{4a^4}{53361 - 4aa}$. Cujus partibus in crucem multiplicatis, ordinatis, ac divisis per 49, exit $4a^4 = 981aa + 39204$ cujus radix aa est $\frac{981 + \sqrt{1589625}}{8} = 280 \llcorner 2254144$.

Supra inventum fuit $\frac{4 \times 49a^4}{53361 - 4aa} = bb$, sive $\frac{14aa}{\sqrt{53361 - 4aa}} = b$. Unde AV $\left(\frac{98aa}{143b}\right)$ est $\frac{7\sqrt{53361 - 4aa}}{143}$, & VP vel VQ $\left(\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}\right)$ est $\frac{8}{143}\sqrt{160083 - 12aa}$. Hoc est substituendo $280 \llcorner 2254144$ pro aa, ac terminos in decimales numeros reducendo, $AV = 11 \llcorner 188297$, & VP vel

VQ =

VQ = 22L147085. Adeoque AP (PV − AV) = 10L958788, & AQ (AV + VQ) 33L335382.

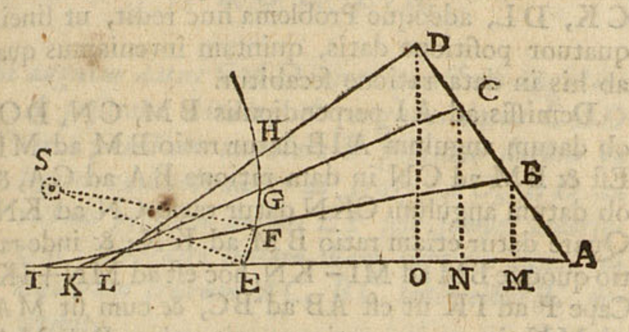
Denique si $\frac{1}{8}$ AR sive 1 ponatur Radius, erit $\frac{1}{8}$ AQ sive 5L555897 tangens anguli ARQ 79 gr. 47′. 48″, & $\frac{1}{8}$ AP sive 1L826465 tangens anguli ARP 61 gr. 17′. 57″. Quorum angulorum semisumma 70 gr. 32′. 52″, est complementum declinationis solis; & semidifferentia 9 gr. 14′. 56″, complementum latitudinis Loci. Proinde declinatio solis erat 19 gr. 27′. 8″, & Latitudo loci 80 gr. 45′. 4″. Quæ erant invenienda.

PROB. LVI.

E Cometæ motu uniformi rectilineo per Cœlum trajicientis locis quatuor observatis, distantiam à terra, motusque determinationem, in Hypothesi Copernicæa colligere.

SI è centro Cometæ in locis quatuor observatis, ad planum Eclipticæ demittantur totidem perpendicula; sintque A, B, C, D puncta in plano illo in quæ perpendicula incidunt; Per puncta illa agatur recta AD, & hæc secabitur à perpendiculis in eadem ratione cum linea quam Cometa motu suo describit, hoc est, ita ut sit AB ad AC ut tempus inter primam & secundam observationem ad tempus inter primam ac tertiam, & AB ad AD ut tempus illud inter primam & secundam observationem ad tempus inter primam & quartam. Ex observa-

observationibus itaque dantur rationes linearum AB, AC, AD ad invicem.



Insuper in eodem Eclipticæ plano sit S Sol, EH arcus lineæ Eclipticæ in qua terra movetur, E, F, G, H loca quatuor terræ temporibus observationum, E locus primus, F secundus, G tertius, H quartus. Jungantur AE, BF, CG, DH, & producantur donec tres posteriores priorem secent in I, K & L, BF in I, CG in K, DH in L. Et erunt anguli AIB, AKC, ALD differentiæ longitudinum observatarum Cometæ; AIB differentia longitudinum loci primi Cometæ & secundi; AKC differentia longitudinum loci primi ac tertii; & ALD differentia longitudinum loci primi & quarti. Dantur itaque ex observationibus anguli AIB, AKC, ALD.

Junge SE, SF, EF; & ob data puncta S, E, F, datumque angulum ESF, dabitur angulus SEF. Datur etiam angulus SEA, utpote differentia longitudinis Cometæ & Solis tempore observationis primæ. Quare si complementum ejus ad duos rectos nempe angulum SEI, addas angulo SEF, dabitur angulus IEF. Trianguli igitur IEF dantur

anguli

anguli una cum latere EF, adeoque datur etiam latus IE. Et simili argumento dantur KE & LE. Dantur igitur positione lineæ quatuor AI, BI, CK, DL, adeoque Problema huc redit, ut lineis quatuor positione datis, quintam inveniamus quæ ab his in data ratione secabitur.

Demissis ad AI perpendiculis BM, CN, DO, ob datum angulum AIB datur ratio BM ad MI. Est & BM ad CN in data ratione BA ad CA, & ob datum angulum CKN datur ratio CN ad KN. Quare datur etiam ratio BM ad KN; & inde ratio quoque BM ad MI − KN, hoc est ad MN + IK. Cape P ad IK ut est AB ad BC, & cum sit MA ad MN in eadem ratione, erit etiam P + MA ad IK + MN in eadem ratione; hoc est in ratione data. Quare datur ratio BM ad P + MA. Et simili argumento si capiatur Q ad IL in ratione AB ad BD, dabitur ratio BM ad Q + MA Et proinde ratio BM ad ipsorum P + MA & Q + MA differentiam, quoque dabitur. At differentia illa, nempe P — Q vel Q — P, datur. Et proinde dabitur BM. Dato autem BM, simul dantur P + MA, & MI, & inde MA, ME, AE, & angulus EAB.

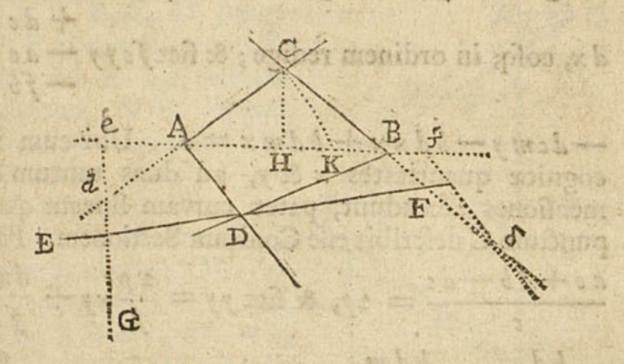
His inventis, erige ad A lineam plano Eclipticæ perpendicularem, quæ sit ad lineam EA ut tangens latitudinis Cometæ in observatione prima ad radium, & istius perpendicularis terminus erit locus centri Cometæ in observatione prima. Unde datur distantia Cometæ à Terra tempore illius observationis. Et eodem modo si è puncto B erigatur perpendicularis quæ sit ad lineam BF ut tangens latitudinis Cometæ in observatione secunda ad radium, habebitur locus centri Cometæ in observatione illa secunda. Et acta linea à loco primo ad locum secundum, ea est in qua Cometa per Cœlum trajicit.

PROB.

PROB. LVII.

Si angulus datus CAD circa punctum angulare A positione datum, & angulus datus CBD circa punctum angulare B positione datum ea lege circumvolvantur ut crura AD, BD ad rectam positione datam EF sese semper intersecent: Invenire lineam illam curvam quam reliquorum crurum AC, BC intersectio C describit.

PRoduc CA ad *d* ut sit A*d* = AD, & CB ad *δ* ut sit B*δ* = BD. Fac angulum A*de* æqualem angulo ADE, & angulum B*δf* æqualem angulo BDF, & produc AB utrinque donec ea occurrat *de* & *δf* in *e* & *f*. Produc etiam *ed* ad G,



ut sit *d*G = *δf*, & à puncto C ad lineam AB ipsi *ed* parallelam age CH, & ipsi *fδ* parallelam CK. Et concipiendo lineas *e*G, *fδ* immobiles manere dum anguli CAD, CBD lege præscripta circa polos A & B volvantur, semper erit G*d* æqualis ipsi *fδ*, &

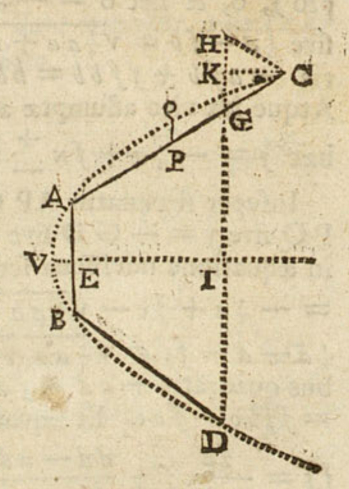
triangulum CHK dabitur specie. Dic itaque $Ae = a$, $eG = b$, $Bf = c$, $AB = m$, $BK = x$, & $CK = y$. Et erit $BK . CK :: Bf . f\delta$. Ergo $f\delta = \frac{cy}{x} = Gd$. Aufer hoc de Ge, & restabit $ed = b - \frac{cy}{x}$. Cum detur specie triangulum CKH, pone $CK . CH :: d . e$; & $CH . HK :: e . f$, & erit $CH = \frac{ey}{d}$, & $HK = \frac{fy}{d}$. Adeoque $AH = m - x - \frac{fy}{d}$. Est autem $AH . HC :: Ae . ed$, hoc est $m - x - \frac{f}{d}y . \frac{ey}{d} :: a . b - \frac{cy}{x}$. Ergo ducendo media & extrema in se, fiet $mb - \frac{mcy}{x} - bx + cy - \frac{bf}{d}y + \frac{cfyy}{dx} = \frac{aey}{d}$. Duc omnes terminos in dx, eosq; in ordinem redige; & fiet $fcyy \begin{matrix} + dc \\ - ae \\ - fb \end{matrix} xy - dcmy - bdxx + bdmx = 0$. Ubi cum incognitæ quantitates x & y, ad duas tantum dimensiones ascendunt, patet curvam lineam quam punctum C describit esse Conicam Sectionem. Pone $\frac{ae + fb - dc}{c} = 2p$, & fiet $yy = \frac{2p}{f}xy + \frac{dm}{f}y + \frac{bd}{fc}xx - \frac{bdm}{fc}x$. Et extracta radice $y = \frac{p}{f}x + \frac{dm}{2f} \pm \sqrt{\frac{pp}{ff}xx + \frac{bd}{fc}xx + \frac{pdm}{ff}x - \frac{bdm}{fc}x + \frac{ddmm}{4ff}}$.

Unde

Unde colligitur Curvam Hyperbolam esse si sit $\frac{bd}{fc}$ affirmativum, vel negativum & minus quam $\frac{pp}{ff}$; Parabolam si sit $\frac{bd}{fc}$ negativum & æquale $\frac{pp}{ff}$; Ellipsin vel circulum si sit $\frac{bd}{fc}$ & negativum & majus quam $\frac{pp}{ff}$. Q. E. I.

PROB. LVIII.

Parabolam describere quæ per data quatuor puncta transibit.



SInt puncta illa data A, B, C, D. Junge AB & eam bisseca in E. Et per E age rectam aliquam VE, quam concipe diametrum esse Parabolæ, puncto V existente vertice ejus. Junge AC ipsique AB parallelam age DG occurrentem AC in G. Dic AB $= a$, AC $= b$, AG $= c$, GD $= d$. In AC cape AP cujusvis longitudinis & à P age PQ parallelam AB, & concipiendo Q punctum esse Parabolæ; dic AP $= x$, PQ $= y$, & æquationem quamvis ad Parabolam assume quæ relatio-

nem inter AP & PQ exprimat. Ut quod sit $y = e + fx \pm \sqrt{gg + hx}$.

Jam si ponatur AP sive $x = 0$, puncto P incidente in ipsum A, fiet PQ sive $y = 0$, ut & $= -$ AB. Scribendo autem in æquatione assumpta o pro x, fiet $y = e \pm \sqrt{gg}$, hoc est $= e \pm g$. Quorum valorum ipsius y major $e + g$ est $= 0$, minor $e - g = -$ AB sive $-a$. Ergo $e = -g$ & $e - g$, hoc est $-2g = -a$, sive $g = \frac{1}{2}a$. Atque adeo vice æquationis assumptæ habebitur hæc $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + hx}$.

Adhæc si ponatur AP sive $x =$ AC ita ut punctum P incidat in C, fiet iterum PQ $= 0$. Pro x igitur in æquatione novissima scribe AC sive b, & pro y, o, & fiet $0 = -\frac{1}{2}a + fb + \sqrt{\frac{1}{4}aa + hb}$, sive $\frac{1}{2}a - fb = \sqrt{\frac{1}{4}aa + hb}$; & partibus quadratis $-afb + ffbb = hb$. Sive $ffb - fa = h$. Atque ita vice assumptæ æquationis habebitur isthæc $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbx - fax}$.

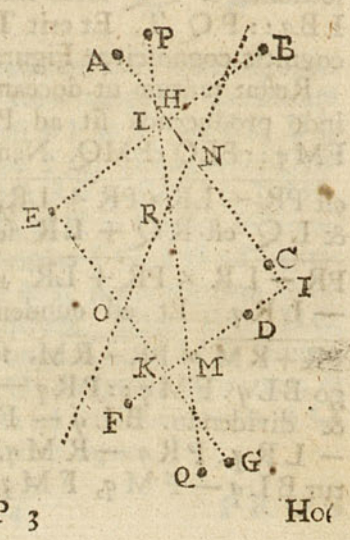
Insuper si ponatur AP sive $x =$ AG sive c, fiet PQ sive $y = -$ GD sive $-d$. Quare pro x & y in æquatione novissima scribe c & $-d$, & fiet $-d = -\frac{1}{2}a + fc - \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbc - fac}$. Sive $\frac{1}{2}a - d - fc = \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbc - fac}$. Et partibus quadratis $-ad - fac + dd + 2dcf + ccff = ffbc - fac$. Et æquatione ordinata & reducta, $ff = \frac{2d}{b - c}f + \frac{dd - ad}{bc - cc}$. Pro $b - c$ hoc est pro GC scribe k, & æquatio illa fiet $ff = \frac{2d}{k}f + \frac{dd - ad}{kc}$.

Et

Et extracta radice $f = \frac{d}{k} \pm \sqrt{\frac{ddc + ddk - adk}{kkc}}$.
Invento autem f, æquatio ad Parabolam, *viz.* $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbx - fax}$, plene determinatur: Cujus itaque constructione Parabola etiam determinabitur. Constructio autem ejus hujusmodi est. Ipsi B D parallelam age C H occurrentem D G in H. Inter D G ac D H cape mediam proportionalem D K, & ipsi C K parallelam age E I bisecantem A B in E, & occurrentem DG in I. Dein produc IE ad V, ut sit EV. EI : : $EBq.DIq - EBq$, & erit V vertex, V E diameter, & $\frac{BEq}{VE}$ latus rectum Parabolæ quæsitæ.

PROB. LIX.

Conicam sectionem per data quinque puncta describere.



SInt puncta ista A, B, C, D, E. Junge AC, BE se mutuo secantes in H. Age DI parallelam BE, & occurrentem AC in I. Item EK parallelam AC, & occurrentem DI productæ in K. Produc ID ad F, & EK ad G; ut sit AHC.BHE : : AIC.FID : : EKG. FKD, & erunt puncta F ac G in conica sectione, ut notum est.

Hoc tamen observare debebis, quod si punctum H cadit inter puncta omnia A, C & B, E, vel extra ea omnia, punctum I cadere debebit vel inter puncta omnia A, C & F, D, vel extra ea omnia; & punctum K inter omnia D, F & E, G, vel extra ea omnia. At si punctum H cadit inter duo puncta A, C, & extra alia duo B, E vel inter illa duo B, E, & extra altera duo A, C, debebit punctum I cadere inter duo punctorum A, C & F, D, & extra alia duo eorum; & similiter punctum K debebit cadere inter duo punctorum D, F & E, G, & extra alia duo eorum: Id quod fiet capiendo I F, K G, ad hanc vel illam partem punctorum I, K, pro exigentia problematis. Inventis punctis F ac G, biseca AC, EG in N & O; item BE, FD in L & M. Junge NO, LM se mutuo secantes in R; & erunt LM & NO diametri conicæ sectionis, R centrum ejus, & BL, FM ordinatim applicatæ ad diametrum LM. Produc LM hinc inde si opus est ad P & Q ita ut sit $BLq \, . \, FMq :: PLQ \, . \, PMQ$, & erunt P & Q vertices Conicæ sectionis & PQ latus transversum. Fac $PLQ \, . \, LBq :: PQ \, . \, T$. Et erit T latus rectum. Quibus cognitis cognoscitur Figura.

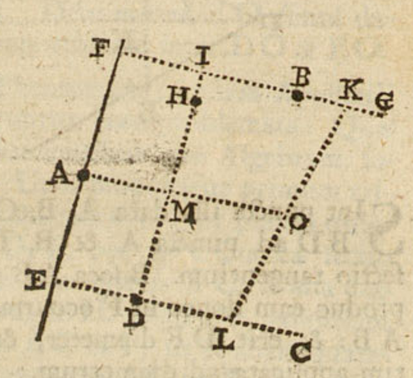
Restat tantum ut doceamus quomodo LM hinc inde producenda sit ad P & Q ita ut fiat $BLq \, . \, FMq :: PLQ \, . \, PMQ$. Nempe PLQ sive $PL \times LQ$ est $\overline{PR - LR} \times \overline{PR + LR}$, nam PL est $PR - LR$, & LQ est $RQ + LR$ seu $PR + LR$. Porro $\overline{PR - LR} \times \overline{PR + LR}$ multiplicando fit $PRq - LRq$. Et ad eundem modum PMQ est $\overline{PR + RM} \times \overline{PR - RM}$, seu $PRq - RMq$. Ergo $BLq \, . \, FMq :: PRq - LRq \, . \, PRq - RMq$, & dividendo $BLq - FMq \, . \, FMq :: RMq - LRq \, . \, PRq - RMq$. Quamobrem cum dentur $BLq - FMq$, FMq, & $RMq - LRq$ da-

hitur

bitur $PRq - RMq$. Adde datum RMq, & dabitur summa PRq, adeoque & latus ejus PR, cui QR æqualis eſt.

PROB. LX.

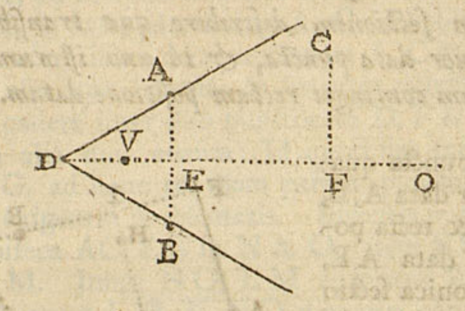
Conicam ſectionem deſcribere quæ tranſibit per quatuor data puncta, & in uno iſtorum punctorum continget rectam poſitione datam.



Sint puncta quatuor data A, B, C, D, & recta poſitione data AE, quam conica ſectio contingat in puncto A. Junge duo quævis puncta DC, & DC, producta ſi opus eſt, occurrat tangenti in E. Per quartum punctum B ipſi DC age parallelam BF, quæ occurrat eidem tangenti in F. Item tangenti parallelam age DI, quæ occurrat ipſi BF in I. In FB, DI, ſi opus eſt productis, cape FG, HI ejus longitudinis ut ſit $AEq . CED :: AFq . BFG :: DIH . BIG$. Et erunt puncta G & H in Conica ſectione, ut notum eſt: Si modo capias FG, IH ad legitimas partes punctorum F & I, juxta regulam in ſuperiore Problemate traditam. Biſeca BG, DC, DH in K, L & M. Junge KL, AM ſe mutuo ſecantes in O, & erit O centrum, A vertex, & HM ordinatim applicata ad ſemidiametrum AO. Quibus cognitis cognoſcitur figura.

PROB. LXI.

Conicam sectionem describere quæ transibit per tria data puncta, & in duobus istorum punctorum continget rectas positione datas.



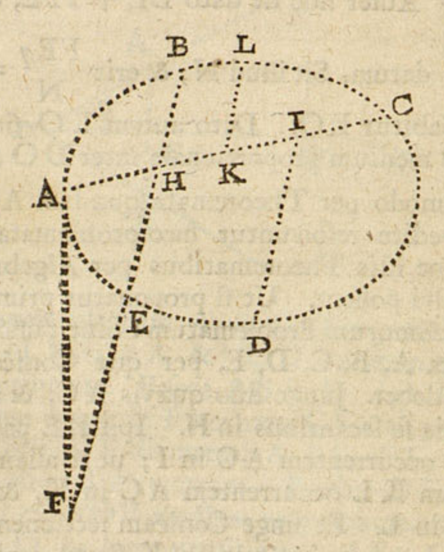
SInt puncta illa data A, B, C, Tangentes AD, BD ad puncta A & B, D communis intersectio tangentium. Biseca AB in E. Age DE, & produc eam donec in F occurrat CF actæ parallelæ AB: & erit DF diameter, & AE, CF ordinatim applicatæ ad diametrum. Produc DF ad O, & in DO cape OV mediam proportionalem inter DO & EO ea lege ut sit etiam $AEq . CFq :: VE \times \overline{VO + OE} . VF \times \overline{VO + OF}$; & erit V vertex, & O centrum Figuræ. Quibus cognitis Figura simul cognoscitur. Est autem $VE = VO - OE$, adeoq; $VE \times \overline{VO + OE} = \overline{VO - OE} \times \overline{VO + OE} = VOq - OEq$. Præterea quia VO media proportionalis est inter DO & EO erit $VOq = DOE$, adeoque $VOq - OEq = DOE - OEq = DEO$. Et simili argumento erit $VF \times \overline{VO + OF} = VOq - OFq = DOF - OFq$. Ergo $AEq . CFq :: DEO . DOE - OFq$

$-OFq$. Eſt $OFq = EOq - 2FEO + FEq$ Adeoque $DOE - OFq = DOE - OEq + 2FEO - FEq = DEO + 2FEO - FEq$. Et $AEq . CFq :: DEO . DEO + 2FEO - FEq :: DE . DE + 2FE - \frac{FEq}{EO}$. Datur ergo $DE + 2FE - \frac{FEq}{EO}$. Aufer hoc de dato $DE + 2FE$, & reſtabit $\frac{FEq}{EO}$ datum. Sit illud N; & erit $\frac{FEq}{N} = EO$, adeoq; dabitur E O. Dato autem E O ſimul datur V O medium proportionale inter D O & E O.

Hoc modo per Theoremata quædam Apollonii ſatis expedite reſolvuntur hæc problemata: Quæ tamen ſine iſtis Theorematibus per Algebram ſolam reſolvi poſſent. Ut ſi proponatur primum trium noviſſimorum Problematum: Sint puncta quinque data A, B, C, D, E, per quæ Conica ſectio tranſire debet. Junge duo quævis A C, & alia duo BE rectis ſe ſecantibus in H. Ipſi B E parallelam age D I occurrentem A C in I; ut & aliam quamvis rectam K L occurrentem A C in K, & conicæ ſectioni in L. Et finge Conicam ſectionem datam eſſe, ita ut cognito puncto K ſimul cognoſcatur punctum L. Et poſito $AK = x$, & $KL = y$, ad exprimendam relationem inter x & y, aſſume quamvis æquationem quæ Conicas ſectiones generaliter exprimit, puta hanc $a + bx + cxx + dy + exy + yy = 0$, ubi a, b, c, d, e denotant quantitates determinatas cum ſignis ſuis, x vero & y quantitates indeterminatas. Si jam quantitates determinatas a, b, c, d, e invenire poſſumus, habebimus Conicam ſectionem. Fingamus ergo punctum L ſucceſſive incidere in puncta A, C, B, E, D, & videamus quid inde ſequetur. Si ergo punctum L incidit in punctum A, erit in eo caſu A K & K L,

hoc

hoc est x & y nihil. Proinde æquationis omnes termini præter a evanescent, & restabit $a = 0$. Quare delendum est a in æquatione illa, & cæteri termini $bx + cxx + dy + exy + yy$ erunt $= 0$. Porro si L incidit in C erit AK seu $x =$ AC, & LK seu $y = 0$. Pone ergo AC $= f$, & substituendo f pro x, & 0 pro y æquatio ad curvam



$bx + cxx + dy + exy + yy = 0$, evadet $bf + cff = 0$, seu $b = -cf$. Et in æquatione illa scripto $-cf$ pro b evadet $-cfx + cxx + dy + exy + yy = 0$. Adhæc si punctum L incidit in punctum B, erit AK seu $x =$ AH, & KL seu $y =$ BH. Pone ergo AH $= g$ & BH $= h$, & perinde scribe g pro x & h pro y, & æquatio $-cfx + cxx$, &c. evadet $-cfg + cgg + dh + egh + hh = 0$. Quod si punctum L incidit in E erit AK $=$ AH seu $x = g$, & KL seu $y =$ HE. Pro HE ergo scribe $-k$ cum signo negativo quia HE jacet ad contrarias partes lineæ AC, & substituendo

endo g pro x & $-k$ pro y, æquatio $-cfx+cxx$, &c. evadet $-cfg+cgg-dk-egk+kk=0$. Aufer hoc de superiori æquatione $-cfg+cgg+dh+egh+hh$, & restabit $dh+egh+hh+dk+egk-kk=0$. Divide hoc per $h+k$, & fiet $d+eg+h-k=0$. Hoc ductum in h aufer de $-cfg+cgg+dh+egh+hh=0$, & restabit $-cfg+cgg+hk=0$, seu $\frac{hk}{-gg+fg}=c$. Denique si punctum L incidit in punctum D, erit AK seu $x=$ AI, & KL seu $y=$ ID. Quare pro AI scribe m & pro ID n, & perinde pro x & y substitue m & n, & æquatio $-cfx+cxx$, &c. evadet $-cfm+cmm+dn+emn+nn=0$. Hoc divide per n & fiet $\frac{-cfm+cmm}{n}+d+em+n=0$. Aufer $d+eg+h-k=0$, & restabit $\frac{-cfm+cmm}{n}+em-eg+n-h+k=0$. Sive $\frac{cmm-cfm}{n}+n-h+k=eg-em$. Jam vero ob data puncta A, B, C, D, E dantur AC, AH, AI, BH, EH, DI, hoc est f, g, m, h, k, n. Atque adeo per æquationem $\frac{hk}{fg-gg}=c$ datur c. Dato autem c, per æquationem $\frac{cmm-cfm}{n}+n-h+k=eg-em$ datur $eg-em$. Divide hoc datum per datum $g-m$, & emerget datum e. Quibus inventis æquatio $d+eg+h-k=0$, seu $d=k-h-eg$ dabit d. Et his cognitis simul determinatur æquatio ad quæsitam Conicam sectionem $cfx=cxx+dy+exy+yy$. Et ex ea æquatione per methodum Cartesii determinabitur Conica sectio.

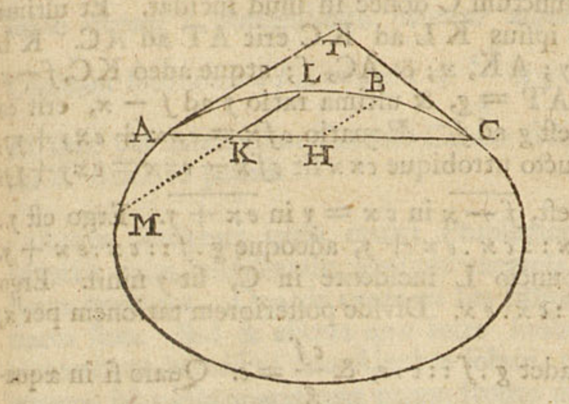
Quod

Quod si quatuor A, B, C, E, & positio rectæ AF quæ tangit Conicam sectionem ad unum istorum punctorum A daretur, posset Conica sectio sic facilius determinari. Inventis ut supra æquationibus $cfx = cxx + dy + exy + yy$, $d = k - h - eg$, & $c = \frac{hk}{fg - gg}$, concipe tangentem AF occurrere rectæ EH in F, dein punctum L moveri per perimetrum figuræ CDE donec incidat in punctum A: & ultima ratio ipsius LK ad AK erit ratio FH ad AH, ut contemplanti figuram constare potest. Dic vero FH $= p$, & in hoc casu ubi LK est ad AK in ultima ratione erit $p . g : : y , x$, sive $\frac{gy}{p} = x$. Quare pro x in æquatione $cfx = cxx + dy + exy + yy$, scribe $\frac{gy}{p}$, & orietur $\frac{cfgy}{p} = \frac{cggyy}{pp} + dy + \frac{egyy}{p} + yy$. Divide omnia per y & emerget $\frac{cfg}{p} = \frac{cggy}{pp} + d + \frac{egy}{p} + y$. Jam quia supponitur punctum L incidere in punctum A, adeoque KL seu y infinite parvum vel nihil esse, dele terminos qui per y multiplicantur, & restabit $\frac{cfg}{p} = d$. Quare fac $\frac{hk}{fg - gg} = c$ dein $\frac{cfg}{p} = d$, denique $\frac{k - h - d}{g} = e$, & inventis c, d & e, æquatio $cfx = cxx + dy + exy + yy$ determinabit conicam sectionem.

Si denique tria tantum puncta A, B, C dentur, una cum positione duarum rectarum AT, CT quæ tangunt Conicam sectionem in duobus isto-

rum

rum punctorum A & C, obtinebitur ut supra ad Conicam sectionem æquatio hæc $cfx = cxx + dy + exy + yy$. Deinde si supponatur ordinatam KL parallelam esse tangenti AT, & concipiatur



eam produci donec rursus occurrat Conicæ sectioni in M, & lineam illam LM accedere ad tangentem AT donec cum ea conveniat ad A; ultima ratio linearum KL & KM ad invicem erit ratio æqualitatis, ut contemplanti figuram constare potest. Quamobrem in illo casu existentibus KL & KM, sibi invicem æqualibus, hoc est duobus valoribus ipsius y (affirmativo scilicet KL, & negativo KM) æqualibus, debent æquationis $cfx = cxx + dy + exy + yy$ termini illi in quibus y est imparis dimensionis, hoc est termini $+ dy + exy$ respectu termini yy in quo y est paris dimensionis, evanescere. Aliter enim duo valores ipsius y, affirmativus & negativus, æquales esse non possunt. Et in illo quidem casu AK infinite minor erit quam LK, hoc est x quam y, proinde & terminus exy quam terminus yy. Atque adeo infinite minor existens, pro nihilo habendus erit. At terminus dy respectu termini yy, non evanescet ut oportet, sed eo major erit nisi d supponatur esse nihil. De-

lendus

Delendus est itaque terminus dy, & sic restabit $cfx = cxx + exy + yy$, æquatio ad conicam sectionem. Concipiantur jam tangentes AT, CT sibi mutuo occurrere in T, & punctum L accedere ad punctum C donec in illud incidat. Et ultima ratio ipsius KL ad KC erit AT ad AC. KL erat y; AK, x; & AC, f; atque adeo KC, $f - x$. Dic AT $= g$, & ultima ratio y ad $f - x$, erit ea quæ est g ad f. Æquatio $cfx = cxx + exy + yy$, subducto utrobique cxx fit $cfx - cxx = exy + yy$; hoc est, $\overline{f - x}$ in $cx = y$ in $\overline{ex + y}$. Ergo est $y . f - x :: cx . ex + y$, adeoque $g . f :: cx . ex + y$. At puncto L incidente in C, fit y nihil. Ergo $g . f :: cx . ex$. Divide posteriorem rationem per x; & evadet $g . f :: c . e$, & $\frac{cf}{g} = e$. Quare si in æquatione $cfx = cxx + exy + yy$, scribas $\frac{cf}{g}$ pro e, fiet $cfx = cxx + \frac{cf}{g} xy + yy$, æquatio ad conicam sectionem. Denique ipsi KL seu AT à dato puncto B per quod Conica sectio transire debet age parallelam BH occurrentem AC in H, & concipiendo LK accedere ad BH donec cum ea coincidat, in eo casu erit AH $= x$, & BH $= y$. Dic ergo datam AH $= m$, & datam BH $= n$, & perinde pro x & y in æquatione $cfx = cxx + \frac{cf}{g} xy + yy$, scribe m & n, & orietur $cfm = cmm + \frac{cf}{g} mn + nn$. Aufer utrobique $cmm + \frac{cf}{g} mn$; & fiet $cfm - cmm - \frac{cf}{g} mn = nn$. Pone $f - m$

$- fn$

$-\frac{fn}{g} = s$, & erit $csm = nn$. Divide utramque partem æquationis per sm, & orietur $c = \frac{nn}{sm}$. Invento autem c, determinata habetur æquatio ad Conicam sectionem $cfx = cxx + \frac{cf}{g}xy + yy$. Et inde per methodum Cartesii Conica sectio datur & describi potest.

Atque hactenus varia evolvi Problemata. In scientiis enim addiscendis prosunt exempla magis quam præcepta. Qua de causa in his fusius expatiatus sum. Sed & aliqua quæ inter scribendum occurrebant immiscui sine Algebra soluta, ut insinuarem in problematis quæ prima fronte difficilia videantur non semper ad Algebram recurrendum esse. Sed tempus est jam æquationum resolutionem docere. Nam postquam Problema ad æquationem deductum est, radices illius æquationis quæ quantitates sunt Problemati satisfacientes extrahere oportebit.

Quomodo æquationes resolvendæ sunt.

POstquam igitur in Quæstionis alicujus solutione ad æquationem perventum est, & æquatio illa debite ordinata est & reducta; ubi quantitates quæ per species designantur & pro datis habentur, revera dantur in numeris, pro ipsis substituendi sunt numeri illi in æquatione, & habebitur æquatio numeralis, cujus radix extracta tandem satisfaciet Quæstioni. Ut si in sectione anguli in quinque partes æquales sumendo r pro radio circuli, q pro subtensa complementi anguli propositi ad duos rectos, & x pro subtensa complementi quintæ partis anguli illius pervenissem ad hanc æquationem $x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x - r^4q = 0$. Ubi in casu aliquo particulari dantur in numeris radius r, & linea dati anguli complementum subtendens q; ut quod radius sit 10 & subtensa 3; substituo numeros illos in æquatione pro r & q, & provenit æquatio numeralis $x^5 - 500x^3 + 50000x - 30000 = 0$, cujus radix tandem extracta erit x; seu linea complementum quintæ partis anguli illius dati subtendens.

De natura radicum Æquationis.

R*Adix vero numerus est qui si in æquatione pro litera vel specie radicem significante substituatur, efficiet omnes terminos evanescere.*

Sic æquationis $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, unitas est radix quoniam scripta pro x producit

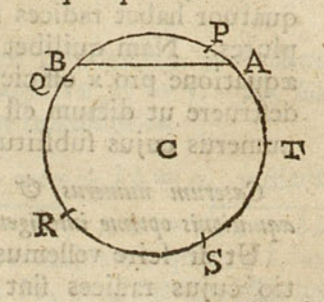
1 —

1 — 1 — 19 + 49 — 30, hoc est nihil. Sed æquationis ejusdem plures esse possunt radices. Nam si in hac eadem æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, pro x scribas numerum 2, & pro potestatibus x similes potestates numeri 2, producetur 16 — 8 — 76 + 98 — 30, hoc est nihil. Atque ita si pro x scribas numerum 3 vel numerum negativum — 5, utroque casu producetur nihil, terminis affirmativis & negativis in hisce quatuor casibus se mutuo destruentibus. Proinde cum numerorum 1, 2, 3, & — 5, quilibet scriptus in æquatione pro x impleat conditionem ipsius x, efficiendo ut termini omnes æquationis conjunctim æquentur nihilo, erit quilibet eorum radix æquationis.

Et ne mireris eandem æquationem habere posse *plures radices*, sciendum est *plures esse posse solutiones ejusdem Problematis*.

Ut si circulorum duorum datorum quæreretur *intersectio*; *duæ* sunt eorum intersectiones, atque adeo quæstio admittit *duo responsa*; & perinde æquatio intersectionem determinans habebit *duas radices* quibus intersectionem utramque determinet, *si modo nihil in datis sit quo responsum ad unam intersectionem determinetur*.

Sic & si arcus APB pars quinta AP invenienda esset, quamvis animum forte advertas tantum ad arcum A P B, tamen æquatio qua quæstio solvetur determinabit quintam partem arcuum omnium qui terminantur ad puncta A & B; nempe quintam partem arcuum ASB, APBSAPB. ASBPASB, & APBSAPBSAPB, æque ac quintam partem arcus APB; quæ quintæ



Q partes

partes si dividas totam circumferentiam in æquales quinque partes PQ, QR, RS, ST, TP, erunt AT, AQ, ATS, AQR. Quoniam igitur quærendo quintas partes arcuum quos recta AB subtendit ad casus omnes determinandos circumferentia tota secari debet in quinque punctis P, Q, R, S, T, ideo æquatio ad omnes casus determinandos habebit radices quinque. Nam quintæ partes horum omnium arcuum pendent ab iisdem datis, & per ejusdem generis calculum inveniuntur; ita ut in eandem semper æquationem incideris sive quæras quintam partem Arcus APB, sive quintam partem Arcus ASB, sive alterius cujusvis ex arcubus quintam partem. Unde si æquatio qua quinta pars Arcus APB determinatur non haberet plures radices quam unam, dum quærendo quintam partem Arcus ASB incidimus in eandem illam æquationem, sequeretur majorem hunc arcum habere eandem quintam partem cum priore qui minor est, eo quod subtensa ejus per eandem æquationis radicem exprimitur. *In omni igitur problemate necesse est æquationem qua respondetur tot habere radices, quot sunt quæsitæ quantitatis casus diversi ab iisdem datis pendentes & eadem argumentandi ratione determinandi.*

Potest vero æquatio tot habere radices quot sunt dimensiones ejus, & non plures.

Sic æquatio $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, quatuor habet radices 1, 2, 3, & -5; non autem plures. Nam quilibet ex his numeris scriptus in æquatione pro x efficiet terminos omnes se mutuo destruere ut dictum est; præter hos vero nullus est numerus cujus substitutione hoc eveniet.

Cæterum numerus & natura radicum ex generatione æquationis optime intelligetur.

Ut si scire vellemus quomodo generetur æquatio cujus radices sint 1, 2, 3, & -5; supponendum

dum erit x ambigue significare numeros illos, seu esse $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, & $x = -5$, vel quod perinde est, $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, & $x + 5 = 0$; Et multiplicando hæc in se, prodibit multiplicatione $x - 1$, in $x - 2$, hæc æquatio $xx - 3x + 2 = 0$, quæ duarum est dimensionum ac duas habet radices 1 & 2. Et hujus multiplicatione in $x - 3$ prodibit $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$, æquatio trium dimensionum totidemque radicum, quæ iterum multiplicata per $x + 5$ fit $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ut supra. Cum igitur hæc æquatio generetur ex quatuor factoribus, $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, & $x + 5$, in se continuo ductis, ubi factorum aliquis nihil est, quod sub omnibus fit nihil erit; ubi vero horum nullus nihil est, quod sub omnibus continetur nihil esse non potest. Hoc est, non potest $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30$, esse nihilo æquale ut oportet, nisi his quatuor casibus ubi est $x - 1 = 0$, vel $x - 2 = 0$, vel $x - 3 = 0$, vel denique $x + 5 = 0$, proinde soli numeri 1, 2, 3, & -5 valere possunt x seu radices esse æquationis. Et simile est ratiocinium de omnibus æquationibus. Nam tali multiplicatione imaginari possumus omnes generari, quamvis factores ab invicem secernere solet esse difficillimum, & ipsum est quod æquationem resolvere & radices extrahere. Habitis enim radicibus habentur factores.

Radices vero sunt duplices affirmativæ *ut in allato exemplo* 1, 2, & 3, *&* negativæ *ut* -5. *Ex his vero aliquæ non raro evadunt* impossibiles.

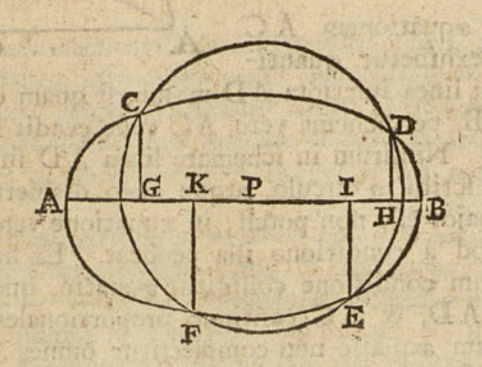
Sic æquationis $xx - 2ax + bb = 0$, radices duæ quæ sunt $a + \sqrt{aa - bb}$, & $a - \sqrt{aa - bb}$ reales quidem sunt ubi aa majus est quam bb, at ubi aa minus est quam bb, evadunt impossibiles

eo quod $aa - bb$ tunc evadet negativa quantitas, & negativæ quantitatis radix quadratica eſt impoſſibilis. Omnis enim radix poſſibilis ſive affirmativa ſit, ſive negativa, ſi per ſeipſam multiplicetur, producet quadratum affirmativum; proinde impoſſibilis erit quæ quadratum negativum producere debet. Eodem argumento colligitur æquationem $x^3 - 4xx + 7x - 6 = 0$, unam quidem realem radicem habere quæ eſt 2, duas vero impoſſibiles, $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$. Nam quælibet ex his 2, $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$ ſcripta in æquatione pro x efficiet omnes ejus terminos ſe mutuo deſtruere; ſunt vero $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$ numeri impoſſibiles, eo quod extractionem radicis quadraticæ ex numero negativo -2 præſupponant.

Æquationum vero radices ſæpe impoſſibiles eſſe æquum eſt ne caſus problematum, qui ſæpe impoſſibiles ſunt, exhibeant poſſibiles.

Ut ſi rectæ & circuli interſectio determinanda eſſet, & pro circuli radio & rectæ à centro ejus diſtantia ponantur literæ duæ; ubi æquatio interſectionem definiens habetur, ſi pro litera deſignante diſtantiam rectæ à centro ponatur numerus minor radio, interſectio poſſibilis erit; ſin major, fiet impoſſibilis; & æquationis radices duæ quæ interſectiones duas determinant, debent eſſe perinde poſſibiles vel impoſſibiles ut rem ipſam vere exprimant. Atque ita ſi circulus CDEF, & Ellipſis ACBF ſe mutuo ſecent in punctis C, D, E, F, & ad rectam aliquam poſitione datam AB, demittantur perpendicula CG, DH, EI, FK, & quærendo longitudinem alicujus è perpendiculis, perveniatur tandem ad æquationem, æquatio illa ubi circulus ſecat Ellipſin in quatuor punctis habebit quatuor radices reales quæ erunt quatuor

illa perpendicula. Quod si circuli radius manente centro ejus minuatur donec punctis E & F coalescentibus circulus tandem tangat Ellipsin, ex radi-



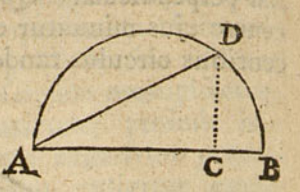
cibus duæ illæ quæ perpendicula EI & FK jam coincidentia exprimunt evadent æquales. Et si circulus adhuc minuatur ut Ellipsin in puncto EF ne quidem tangat sed secet tantum in alteris duobus punctis C, D, tunc ex quatuor radicibus duæ illæ quæ perpendicula EI, FK jam facta impossibilia exprimebant, fient una cum perpendiculis illis impossibiles. Et hoc modo in omnibus æquationibus augendo vel minuendo terminos earum, ex inæqualibus radicibus duæ primo æquales deinde impossibiles evadere solent. Et inde fit quod radicum impossibilium numerus semper sit par.

Sunt tamen radices æquationum aliquando possibiles ubi Schema impossibiles exhibet. Sed hoc fit ob limitationem aliquam in Schemate quod ad æquationem nil spectat.

Ut si in semicirculo ADB datis diametro AB, & linea inscripta AD, demissoque perpendiculo

 DC,

DC, quærerem diametri ſegmentum AC, foret $\frac{ADq}{AB} = AC$. Et per hanc æquationem AC realis exhibetur quanti-



tas ubi linea inſcripta AD major eſt quam diameter AB, per Schema vero AC tunc evadit impoſſibilis. Nimirum in ſchemate linea AD supponitur inſcribi in circulo, atque adeo diametro circuli major eſſe non poteſt; in æquatione vero nihil eſt quod à conditione illa pendeat. Ex hac ſola linearum conditione colligitur æquatio, quod ſint AB, AD, & AC continue proportionales. Et quoniam æquatio non complectitur omnes conditiones ſchematis non neceſſe eſt ut omnium conditionum teneatur limitibus. Quicquid amplius eſt in ſchemate quam in æquatione poteſt illud limitibus arctare, hanc non item. Qua de cauſa ubi æquationes ſunt imparium dimenſionum, adeoque radices omnes impoſſibiles habere non poſſunt; ſchemata quantitatibus à quibus radices omnes pendent ſæpe limites imponunt quos tranſgredi ſervatis ſchematum conditionibus impoſſibile eſt.

Ex radicibus vero quæ reales ſunt, affirmativæ & negativæ ad plagas oppoſitas ſolent tendere.

Sic in ſchemate penultimo quærendo perpendiculum CG incidetur in æquationem cujus duæ erunt affirmativæ radices CG ac DH à punctis C & D tendentes verſus unam plagam, & duæ negativæ EI & FK, tendentes à punctis E & F verſus plagam oppoſitam. Aut ſi in linea AB ad quam perpendicula demittuntur detur aliquod punctum P, & pars ejus PG à puncto illo dato ad perpendiculorum aliquod CG extendens quæratur, incidemus in æquationem quatuor radicum PG, PH,

PI.

PI, PK, quarum quæsita PG, & quæ à puncto P ad easdem partes cum PG tendunt (ut PK) affirmativæ erunt, quæ vero tendunt ad partes contrarias (ut PH, PI) negativæ.

Ubi æquationis radices nullæ impossibiles sunt, numerus radicum *affirmativarum & negativarum ex* signis *terminorum æquationis cognosci potest.* Tot *enim sunt radices affirmativæ quot signorum in continua serie* mutationes *de* + *in* — & — *in* +; *cæteræ* negativæ *sunt.*

Ut in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ubi terminorum signa se sequuntur hoc ordine + — — + — variationes secundi — à primo +, quarti + à tertio — & quinti —, à quarto +, indicant tres affirmativas esse radices, adeoque quartam negativam esse. At ubi radices aliquæ *impossibiles* sunt regula non valet, nisi quatenus impossibiles illæ quæ nec negativæ sunt nec affirmativæ pro *ambiguis* habeantur. Sic in æquatione $x^3 + pxx + 3ppx - q = 0$, signa indicant unam esse affirmativam radicem & duas negativas. Finge $x = 2p$ seu $x - 2p = 0$, & multiplica æquationem priorem per hanc $x - 2p = 0$, ut una adhuc radix affirmativa addatur prioribus, & prodibit

hæc æquatio $x^4 - px^3 + ppxx \begin{matrix} -6p^3 \\ -q \end{matrix} x + 2pq = 0$,

quæ habere deberet duas affirmativas ac duas negativas radices, habet tamen, si mutationem signorum spectes, affirmativas quatuor. Sunt ergo *duæ impossibiles* quæ pro ambiguitate sua priori casu negativæ posteriori affirmativæ esse videntur.

Verum quot radices impossibiles sunt cognosci fere potest per hanc regulam.

Constitue seriem fractionum quorum denominatores sunt numeri in hac progressione 1, 2, 3, 4, 5, &c. *pergendo ad numerum usque qui est dimensionum æquationis; numeratores vero eadem series numerorum in ordine contrario. Divide unamquamque fractionem posteriorem per priorem. Fractiones prodeuntes colloca super terminis mediis æquationis. Et sub quolibet mediorum terminorum, si quadratum ejus ductum in fractionem capiti imminentem sit majus quam rectangulum terminorum utrinque consistentium, colloca signum* + ; *sin minus, signum* —. *Sub primo vero & ultimo termino colloca signum* +. *Et tot erunt radices impossibiles quot sunt in subscriptorum signorum serie mutationes de* + *in* — *&* — *in* +.

Ut si habeatur æquatio $x^3 + pxx + 3ppx - q = 0$: Divido seriei hujus $\frac{3}{1} . \frac{2}{2} . \frac{1}{3}$ fractionum secundam $\frac{2}{2}$ per primam $\frac{3}{1}$, & tertiam $\frac{1}{3}$ per secundam $\frac{2}{2}$, & fractiones prodeuntes $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{3}$ colloco super mediis terminis æquationis ut sequitur. Dein quoniam quadratum secundi termini pxx ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{3}$, nimirum $\frac{ppx^4}{3}$ minus est quam primi termini x^3, & tertii $3ppx$ rectangulum $3ppx^4$ sub termino pxx colloco signum —. At quia tertii termini $3ppx$ quadratum $9p^4xx$ ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{3}$, majus est quam nihil, atque adeo multo majus quam secundi termini pxx, & quarti $-q$ rectangulum negativum, colloco sub tertio illo termino signum +. Dein sub primo termino x^3 & ultimo $-q$ colloco signa +. Et signorum subscriptorum quæ in hac sunt serie + — + + mutationes duæ, una de + in —, alia de — in + indicant duas esse radices impossibiles.

$$\begin{array}{cccc} & \frac{1}{3}. & \frac{1}{3}. & \\ x^3 & + pxx & + 3ppx & - q = 0 \\ + & - & + & + \end{array}$$

Sic

Sic & æquatio $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$, duas habet radices impossibiles. Æquatio item $x^4 - 6xx - 3x - 2 = 0$, duas habet.

$$\begin{array}{ccccc} & \tfrac{1}{3}. & \tfrac{1}{3}. & & \\ x^3 & -4xx & +4x & -6 & =0 \\ + & + & - & + & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & \tfrac{3}{8} & \tfrac{4}{9} & \tfrac{3}{8} & & \\ x^4 & * & -6xx & -3x & -2 & =0 \\ + & + & + & - & + & \end{array}$$

Nam hæc fractionum series $\tfrac{4}{1}.\ \tfrac{3}{2}.\ \tfrac{2}{3}.\ \tfrac{1}{4}$ dividendo secundam per primam, tertiam per secundam, & quartam per tertiam, dat hanc seriem $\tfrac{3}{8}.\ \tfrac{4}{9}.\ \tfrac{3}{8}$ super mediis æquationis terminis collocandam. Dein secundi termini qui hic nihil est quadratum ductum in fractionem imminentem $\tfrac{3}{8}$ producit nihil, quod tamen majus est quam rectangulum negativum $-6x^6$ sub terminis utrinque positis x^4 & $-6xx$ contentum. Quare sub termino illo deficiente scribo $+$. In cæteris pergo ut in exemplo superiori; & signorum subscriptorum prodit hæc series $+ + + - +$ ubi duæ mutationes indicant duas radices impossibiles. Et ad eundem modum in æquatione $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$, deteguntur impossibiles duæ.

$$\begin{array}{cccccc} & \tfrac{2}{5}. & \tfrac{1}{2}. & \tfrac{1}{2}. & \tfrac{2}{5}. & \\ x^5 & -4x^4 & +4x^3 & -2xx & -5x & -4=0 \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

Ubi termini duo vel plures simul desunt, sub primo terminorum deficientium collocandum est signum $-$, sub secundo signum $+$, sub tertio signum $-$, & sic deinceps, semper variando signa, nisi quod sub ultimo terminorum simul deficientium semper collocandum est signum $+$ ubi termini deficientibus utrinque proximi habent signa contraria. Ut in æquationibus

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & +ax^4 & * & * & * & +a^5=0, \\ + & + & - & + & - & + \end{array}$$

&

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & +ax^4 & * & * & * & -a^5=0, \\ + & + & + & - & + & + \end{array}$$

qua-

rum

rum prior quatuor posterior duas habet impossibiles radices. Sic & æquatio

$$\begin{array}{cccccccc} & \frac{3}{7}. & \frac{5}{9}. & \frac{3}{5}. & \frac{3}{5}. & \frac{5}{9}. & \frac{3}{7}. & \\ x^7 & -2x^6 & +3x^5 & -2x^4 & +x^3 & * & * & -3=0 \\ + & - & + & - & + & - & + & + \end{array}$$

sex habet impossibiles.

Hinc etiam cognosci potest utrum radices impossibiles inter affirmativas radices latent an inter negativas. Nam signa terminorum signis subscriptis variantibus imminentium indicant tot affirmativas esse impossibiles quot sunt ipsorum variationes, & tot negativas quot sunt ipsorum successiones sine variatione. Sic in æquatione

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & -4x^4 & +4x^3 & -2xx & -5x & -4=0 \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

quoniam signis infra scriptis variantibus $+ - +$ quibus radices duæ impossibiles indicantur, imminentes termini $-4x^4+4x^3-2xx$, signa habent $- + -$, quæ per duas variationes indicant duas affirmativas radices; ideo radices duæ impossibiles inter affirmativas latebunt. Cum itaque omnium æquationis terminorum signa $+ - + - - -$ per tres variationes indicant tres esse affirmativas radices, & reliquas duas negativas esse, & inter affirmativas lateant duæ impossibiles, sequitur æquationis unam esse radicem vere affirmativam duas negativas ac duas impossibiles. Quod si æquatio fuisset

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & -4x^4 & -4x^3 & -2xx & -5x & -4=0 \\ + & + & - & - & + & + \end{array}$$

tunc termini subscriptis signis prioribus variantibus $+ -$ imminentes, nimirum $-4x^4-4x^3$ per signa sua non variantia $-$ & $-$ indicant unam ex negativis radicibus impossibilem esse; & termini signis subscriptis posterioribus variantibus $- +$ imminentes, nimirum $-2xx-5x$ per signa sua non variantia $-$ & $-$ indicant aliam

ex

ex negativis radicibus impossibilem esse. Quamobrem cum æquationis signa + — — — — — per unam variationem indicent unam affirmativam radicem, cæteras quatuor negativas esse; sequitur unam esse affirmativam, duas negativas, ac duas impossibiles. Atque hæc ita se habent ubi non sunt plures impossibiles radices quam per regulam allatam deteguntur. Possunt enim plures esse, licet id perraro eveniat.

De transmutationibus Æquationum.

CÆterum æquationis cujusvis radices omnes affirmativæ *in* negativas *&* negativæ *in* affirmativas *mutari possunt, idque mutando tantum signa terminorum alternorum.*

Sic æquationis $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$, radices tres affirmativæ mutabuntur in negativas, & duæ negativæ in affirmativas mutando tantum signa secundi quarti & sexti termini ut hic fit, $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2xx - 5x + 4 = 0$. Easdem habet hæc æquatio radices cum priore nisi quod hic affirmativæ sunt quæ ibi erant negativæ, & hic negativæ quæ ibi erant affirmativæ; & radices duæ impossibiles quæ ibi inter affirmativas latebant hic latent inter negativas, ita ut his deductis restet unica tantum radix vere negativa.

Sunt & aliæ æquationum transmutationes quæ diversis usibus inserviunt. *Possumus enim supponere radicem æquationis ex cognita & incognita aliqua quantitate utcunque componi, & perinde pro ea substituere quod æquipollens esse fingitur.* Ut si supponamus radicem æqualem esse summæ vel differentiæ cognitæ alicu-

alicujus & incognitæ quantitatis. Nam possumus hoc pacto radices æquationis cognita illa quantitate augere vel diminuere, vel de cognita quantitate subducere; atque ita efficere ut earum aliquæ quæ prius erant negativæ jam fiant affirmativæ, vel ut aliquæ ex affirmativis evadant negativæ; vel etiam ut omnes evadant affirmativæ aut omnes negativæ. Sic in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, si radices unitate augeri vellem, fingo $x + 1 = y$, seu $x = y - 1$, & perinde pro x scribo in æquatione $y - 1$, & pro quadrato, cubo, quadrato-quadrato de x similem potestatem de $y - 1$, ad hunc modum.

$x^4.$	$y^4 - 4y^3 + 6yy - 4y + 1$
$-x^3.$	$- y^3 + 3yy - 3y + 1$
$-19xx.$	$- 19yy + 38y - 19$
$+49x.$	$+ 49y - 49$
$-30.$	-30
Summa	$y^4 - 5y^3 - 10yy + 80y - 96 = 0.$

Et æquationis prodeuntis $y^4 - 5y^3 - 10yy + 80y - 96 = 0$, radices erunt 2, 3, 4, − 4, quæ prius erant 1, 2, 3, − 5, unitate jam factæ majores. Quod si pro x scripsissem $y + 1\frac{1}{2}$ prodiisset æquatio $y^4 + 5y^3 - 10yy - \frac{5}{4}y + \frac{39}{16} = 0$, cujus duæ fuissent radices affirmativæ $\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$ ac duæ negativæ $-\frac{1}{2}$ & $-6\frac{1}{2}$. Pro x vero scribendo $y - 6$ prodiisset æquatio cujus radices fuissent 7, 8, 9, 1, omnes nimirum affirmativæ, & pro eodem scribendo $y + 4$ radices jam numero quaternario diminutæ evasissent − 3, − 2, − 1, − 9, negativæ omnes.

Et hoc modo augendo vel diminuendo radices siquæ impossibiles sunt, hæ aliquando facilius detegentur quam prius. Sic in æquatione $x^3 - 3aax - 3a^3$

$-3a^3=0$, radices nullæ per præcedentem regulam apparent impossibiles. At si augeas radices quantitate a scribendo $y-a$ pro x, in æquatione resultante $y^3-3ayy-a^3=0$, radices duæ impossibiles jam per regulam illam detegi possunt.

Eadem operatione possumus etiam secundos terminos æquationum tollere. Hoc enim fiet si cognitam quantitatem secundi termini æquationis propositæ per numerum dimensionum æquationis divisam, subducamus de quantitate quæ pro novæ æquationis radice significanda assumitur, & residuum substituamus pro radice æquationis propositæ. Ut si proponatur æquatio $x^3-4xx+4x-6=0$, cognitam quantitatem secundi termini quæ est -4 divisam per numerum dimensionum æquationis 3 subduco de specie quæ pro nova radice significanda assumitur, puta de y, & residuum $y+\frac{4}{3}$ substituo pro x, & provenit,

$$\begin{array}{l} y^3+4yy+\frac{16}{3}y+\frac{64}{27} \\ \quad\; -4yy-\frac{32}{3}y-\frac{64}{9} \\ \quad\quad\quad\;\, +4y+\frac{16}{3} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\;\; -6 \\ \hline y^3 \quad * \quad -\frac{4}{3}y-\frac{146}{27}=0. \end{array}$$

Eadem methodo potest & tertius æquationis terminus tolli. Proponatur æquatio $x^4-3x^3+3xx-5x-2=0$, & finge $x=y-e$, & substituendo $y-e$ pro x orietur hæc æquatio.

$$y^4 \begin{array}{c}-4e\\-3\end{array} y^3 \begin{array}{c}+6ee\\+9e\\+3\end{array} yy \begin{array}{c}-4e^3\\-9ee\\-6e\\-5\end{array} y \left.\begin{array}{c}+e^4\\+3e^3\\+3ee\\+5e\\-2\end{array}\right\} =0.$$

Hujus

Hujus æquationis tertius terminus est $6ee + 9e + 3$ ductum in yy. Ubi si $6ee + 9e + 3$ nullum esset, eveniret ipsum quod volumus. Fingamus itaque nullum esse ut inde colligamus quinam numerus ad hunc effectum substitui debet pro e, & habebimus æquationem quadraticam $6ee + 9e + 3 = 0$, quæ divisa per 6 fiet $ee + \frac{3}{2}e + \frac{1}{2} = 0$, seu $ee = -\frac{3}{2}e - \frac{1}{2}$, & extracta radice

$$e = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}}, \text{ seu } = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}}, \text{ hoc est}$$

$$= -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}, \text{ atque adeo vel } = -\frac{1}{2} \text{ vel } = -1.$$

Unde $y - e$ erit vel $y + \frac{1}{2}$ vel $y + 1$. Quamobrem cum $y - e$, scriptum fuit pro x, vice $y - e$ debet $y + \frac{1}{2}$ vel $y + 1$ scribi pro x, ut tertius æquationis resultantis terminus nullus sit. Et in utroque quidem casu id eveniet. Nam si pro x scribatur $y + \frac{1}{2}$ orietur hæc æquatio $y^4 - y^3 - \frac{15}{4}y - \frac{65}{16} = 0$; sin scribatur $y + 1$, orietur hæc $y^4 + y^3 - 4y - 6 = 0$.

Possunt & radices æquationis per datos numeros multiplicari vel dividi; & hoc pacto termini æquationum diminui, fractionesque & radicales quantitates aliquando tolli.

Ut si æquatio sit $y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{146}{27} = 0$, ad tollendas fractiones fingo esse $y = \frac{1}{3}z$, & perinde pro y substituendo $\frac{1}{3}z$ provenit æquatio nova

$$\frac{z^3}{27} - \frac{12z}{27} - \frac{146}{27} = 0, \text{ \& rejecto terminorum}$$

communi denominatore, $z^3 - 12z - 146 = 0$, cujus æquationis radices sunt triplo majores quam ante. Et rursus ad diminuendos terminos æquationis hujus si scribatur $2v$ pro z, prodibit $8v^3 - 24v - 146 = 0$, & divisis omnibus per 8 fiet $v^3 - 3v - 18\frac{1}{4} = 0$, cujus æquationis radices dimidiæ sunt radicum prioris. Et hic si tandem inveni-

inveniatur v ponendum erit $2v = z$, $\frac{1}{3}z = y$, & $y + \frac{4}{3} = x$, & æquationis primo propositæ $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$ habebitur radix x.

Sic & in æquatione $x^3 - 2x + \sqrt{3} = 0$, ad tollendam quantitatem radicalem $\sqrt{3}$, pro x scribo $y\sqrt{3}$, & provenit æquatio $3y^3\sqrt{3} - 2y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$, quæ divisis omnibus terminis per $\sqrt{3}$ fit $3y^3 - 2y + 1 = 0$.

Rursus æquationis radices in earum reciprocas transmutari possunt, & hoc pacto æquatio aliquando ad formam commodiorem reduci.

Sic æquatio novissima $3y^3 - 2y + 1 = 0$, scribendo $\frac{1}{z}$ pro y evadit $\frac{3}{z^3} - \frac{2}{z} + 1 = 0$, seu terminis omnibus multiplicatis per z^3, & ordine terminorum mutato $z^3 - 2zz + 3 = 0$. Potest etiam æquationis terminus penultimus hoc pacto tolli, si modo secundus prius tollatur, ut factum vides in exemplo præcedente. Aut si antepenultimum tolli cupias id fiet si modo tertium prius tollas.* Sed & radix minima hoc pacto in maximam convertitur, & maxima in minimam; quod usum nonnullum habere potest in sequentibus. Sic in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, cujus radices sunt $3, 2, 1, -5$, si scribatur $\frac{1}{y}$ pro x resultabit æquatio $\frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^3} - \frac{19}{yy} + \frac{49}{y} - 30 = 0$, quæ, terminis omnibus multiplicatis per y^4 ac divisis per 30, signisque mutatis, fiet $y^4 - \frac{49}{30}y^3 + \frac{19}{30}yy + \frac{1}{30}y - \frac{1}{30} = 0$, cujus radices sunt $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{5}$; radicum affirmativarum maxima 3 jam conversa in minimam $\frac{1}{3}$, & minima 1 jam facta maxima, & radice negativa -5 quæ om-

omnium maxime diſtabat à nihilo, jam omnium maxime accedente ad nihil.

Sunt & aliæ æquationum tranſmutationes ſed quæ omnes ad exemplum tranſmutationis illius ubi tertium æquationis terminum ſuſtulimus confici poſſunt, ut non opus ſit hac de re plura dicere. Addamus potius aliqua de limitibus æquationum.

Ex Æquationum generatione conſtat quod cognita quantitas ſecundi *termini æquationis, ſi ſignum ejus mutetur, æqualis ſit aggregato omnium radicum ſub ſignis propriis*; *ea* tertii *æqualis aggregato rectangulorum ſub ſingulis binis radicibus*; *ea* quarti *ſi ſignum ejus mutetur, æqualis aggregato contentorum ſub ſingulis ternis radicibus*; *ea* quinti *æqualis aggregato contentorum ſub ſingulis quaternis*; *& ſic in infinitum.*

Aſſumamus $x = a$, $x = b$, $x = -c$, $x = d$, &c. ſeu $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x + c = 0$, $x - d = 0$, & ex horum continua multiplicatione generemus æquationes, ut ſupra. Jam multiplicando $x - a$ per $x - b$ producetur æquatio $xx \begin{smallmatrix} -a \\ -b \end{smallmatrix} x + ab = 0$; ubi cognita quantitas ſecundi termini, ſi ſigna ejus mutentur, nimirum $a + b$, eſt ſumma duarum radicum a & b, & cognita tertii ab illud unicum quod ſub utraque continetur rectangulum. Rurſus multiplicando hanc æquationem per $x + c$ producetur æquatio cubica $x^3 \begin{smallmatrix} -a \\ -b \\ +c \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} +ab \\ -ac \\ -bc \end{smallmatrix} x + abc = 0$, ubi cognita quantitas ſecundi ſub ſignis mutatis nimirum $a + b - c$ eſt ſumma radicum a, b & $-c$; cognita tertii $ab - ac - bc$, ſumma rectangulorum ſub ſingulis binis a & b, a & $-c$, b & $-c$; & cognita quarti ſub ſigno mutato $-abc$ illud unicum contentum eſt quod omnium

con-

continua multiplicatione generatur, a in b in $-c$. Adhæc multiplicando cubicam illam æquationem per $x-d$ producetur hæcce quadrato-quadratica

$$x^4 \begin{array}{l} -a \\ -b \\ +c \\ -d \end{array} x^3 \begin{array}{l} +ab \\ -ac \\ -bc \\ +ad \\ +bd \\ -cd \end{array} xx \begin{array}{l} +abc \\ -abd \\ +bcd \\ +acd \end{array} x - abcd = 0:$$

ubi cognita quantitas secundi termini sub signis mutatis $a+b-c+d$, est summa omnium radicum; ea tertii $ab-ac-bc+ad+bd-cd$ summa rectangulorum sub singulis binis; ea quarti sub signis mutatis $-abc+abd-bcd-acd$ summa contentorum sub singulis ternis; ea quinti $-abcd$ contentum unicum sub omnibus. Et hinc primo colligimus omnes æquationis cujuscunque, terminos nec fractos nec surdos habentis, radices non surdas, & radicum binarum rectangula, ternarumque aut plurium contenta esse aliquos ex divisoribus integris ultimi termini; atque adeo ubi constiterit nullum ultimi termini divisorem, esse aut radicem æquationis, aut duarum radicum rectangulum pluriumve contentum, simul constabit nullam esse radicem radicumve rectangulum aut contentum nisi quod sit surdum.

Ponamus jam cognitas quantitates terminorum æquationis sub signis mutatis esse p, q, r, s, t, v, &c. eam nempe secundi p, tertii q, quarti r, quinti s, & sic deinceps. Et signis terminorum probe observatis fiat $p=a$. $pa+2q=b$. $pb+qa+3r=c$. $pc+qb+ra+4s=d$. $pd+qc+rb+sa+5t=e$. $pe+qd+rc+sb+ta+6v=f$. & sic in infinitum, observata serie progressionis.

Et erit a summa radicum, b summa quadratorum ex singulis radicibus, c summa cuborum, d summa quadrato-quadratorum, e summa quadrato-cuborum, f summa cubo-cuborum, & sic in reliquis. Ut in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ubi cognita quantitas secundi termini est -1, tertii -19, quarti $+49$, quinti -30; ponendum erit $1 = p$, $19 = q$, $-49 = r$, $30 = s$. Et inde orientur $a = (p =) 1$. $b = (pa + 2q = 1 + 38 =) 39$. $c = (pb + qa + 3r = 39 + 19 - 147 =) - 89$. $d = (pc + qb + ra + 4s = - 89 + 741 - 49 + 120 =) 723$. Quare summa radicum erit 1, summa quadratorum radicum 39, summa cuborum -89, & summa quadrato-quadratorum 723. Nimirum æquationis illius radices sunt 1, 2, 3 & -5, & harum summa $1 + 2 + 3 - 5$ est 1, summa quadratorum $1 + 4 + 9 + 25$ est 39, summa cuborum $1 + 8 + 27 - 125$ est -89, & summa quadrato-quadratorum $1 + 16 + 81 + 625$ est 723.

De limitibus Æquationum.

Et hinc colliguntur *limites* inter quos consistent radices æquationis ubi nulla earum impossibilis est. Nam cum radicum omnium quadrata sunt affirmativa, quadratorum summa affirmativa erit, ideoque quadrato maximæ radicis major. Et eodem argumento, summa quadrato-quadratorum radicum omnium major erit quam quadrato-quadratum radicis maximæ, & summa cubo-cuborum major quam cubo-cubus radicis maximæ.

Quamobrem si limitem desideres quem radices nullæ transgrediuntur, quære summam quadratorum radicum & extrahe ejus radicem quadraticam. Hæc enim radix major

jor *erit quam radix maxima æquationis.* Sed ad radicem maximam propius accedes si quæras *summam quadrato-quadratorum & extrahas ejus radicem quadrato-quadraticam, & adhuc* magis *si quæras summam cubo-cuborum & extrahas ejus radicem cubo-cubicam: Et ita in infinitum.*

Sic in æquatione præcedente radix quadratica summæ quadratorum radicum, seu $\sqrt{39}$, est $6\frac{1}{2}$ quam proxime, & $6\frac{1}{2}$ magis distat à nihilo quam ulla radicum 1, 2, 3, — 5. At radix quadrato-quadratica summæ quadrato-quadratorum radicum nempe $\sqrt[4]{723}$ quæ est $5\frac{1}{5}$ circiter propius accedit ad radicem à nihilo remotissimam — 5.

Si inter summam quadratorum & summam quadrato-quadratorum radicum inveniatur media proportionalis, erit ea paulo major quam summa cuborum radicum sub signis affirmativis connexorum. Et inde hujus mediæ proportionalis & summæ cuborum sub propriis signis, ut prius inventæ, semisumma erit major quam summa cuborum radicum affirmativarum, & semidifferentia major quam summa cuborum radicum negativarum.

Atque adeo maxima radicum affirmativarum minor erit quam radix cubica illius semisummæ, & maxima radicum negativarum minor quam radix cubica illius semidifferentiæ.

Sic in æquatione præcedente media proportionalis inter summam quadratorum radicum 39, & summam quadrato-quadratorum 723 est 168 circiter. Summa cuborum sub propriis signis supra erat — 89. Hujus & 168 semisumma est $39\frac{1}{2}$, semidifferentia $128\frac{1}{2}$. Prioris radix cubica, quæ est $3\frac{1}{3}$ circiter, major est quam maxima radicum affirmativarum 3. Posterioris radix cubica quæ est

$5\frac{1}{21}$ proxime, tranſcendit radicem negativam -5. Quo exemplo videre eſt quam prope ad radicem hac methodo acceditur ubi unica tantum radix negativa eſt vel unica affirmativa. *Et tamen propius adhuc accederetur*, ſi inter ſummam quadrato quadratorum radicum & ſummam cubo-cuborum media proportionalis inveniretur atque ex hujus, & ſummæ quadrato-cuborum radicum ſemiſumma & ſemidifferentia radices quadrato cubicæ extraherentur. Nam radix quadrato-cubica ſemiſummæ tranſcenderet maximam radicem affirmativam, & radix quadrato-cubica ſemidifferentiæ maximam ſeu extimam negativam, ſed exceſſu multo minore quam ante. Cum igitur radix quælibet, augendo vel diminuendo radices omnes fieri poteſt minima, dein minima in maximam converti, & poſtea omnes præter maximam fieri negativæ, conſtat quomodo radix imperata quam proxime poteſt obtineri.

Si radices omnes præter duas negativæ ſunt, poſſunt illæ duæ ſimul hoc modo erui.

Inventa juxta methodum præcedentem ſumma cuborum duarum illarum radicum, ut & ſumma quadrato-cuborum & ſumma quadrato-quadrato cuborum radicum omnium; inter poſteriores duas ſummas quære mediam proportionalem, & ea erit differentia inter ſummam cubo-cuborum radicum affirmativarum, & ſummam cubo-cuborum radicum negativarum quam proxime; adeoque hujus mediæ proportionalis & ſummæ cubo-cuborum radicum omnium ſemiſumma erit ſumma cubo-cuborum radicum affirmativarum, & ſemidifferentia erit ſumma cubo-cuborum radicum negativarum. Habita igitur tum ſumma cuborum, tum ſumma cubo-cuborum radicum duarum affirmativarum, de duplo ſummæ poſterioris aufer quadratum ſummæ prioris, & reliqui radix quadratica

tica erit differentia cuborum duarum radicum. Habita vero tum summa tum differentia cuborum habentur cubi ipsi. Extrahe eorum radices cubicas & habebuntur æquationis radices duæ affirmativæ quam proxime. Et si in altioribus potestatibus opus consimile instituеretur magis adhuc accederetur ad radices. Sed hæ limitationes ob difficilem calculum minus usui sunt, & ad æquationes tantum extendunt quæ nullas habent radices imaginarias. Quapropter limites alia ratione invenire jam docebo quæ & facilior sit & ad omnes æquationes extendat.

Multiplicetur æquationis terminus unusquisque per numerum dimensionum ejus, & dividatur factum per radicem æquationis. Dein rursus multiplicetur unusquisque terminorum prodeuntium per numerum unitate minorem quam prius, & factum dividatur per radicem æquationis. Et sic pergatur semper multiplicando per numeros unitate minores quam prius, & factum dividendo per radicem, donec tandem termini omnes destruantur quorum signa diversa sunt à signo primi seu altissimi termini præter ultimum. Et numerus ille erit omni affirmativa radice major; qui in terminis prodeuntibus scriptus pro radice, efficit eorum qui singulis vicibus per multiplicationem producebantur aggregatum ejusdem semper esse signi cum primo seu altissimo termino æquationis.

Ut si proponatur æquatio $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 0$. Hanc primum sic multiplico $\overset{5}{x^5} - \overset{4}{2x^4} - \overset{3}{10x^3} + \overset{2}{30xx} + \overset{1}{63x} - \overset{0}{120}$. Dein terminos prodeuntes divisos per x rursum multiplico sic $\overset{4}{5x^4} - \overset{3}{8x^3} - \overset{2}{30xx} + \overset{1}{60x} + \overset{0}{63}$, & terminos prodeuntes rursum dividendo per x prodeunt $20x^3 - 24xx - 60x + 60$, quos minuendi gratia divido per maximum divisorem 4 & fiunt

$5x^3 - 6xx - 15x + 15$. Hi itidem multiplicati per progressionem 3. 2. 1. 0, & divisi per x fiunt $15xx - 12x - 15$, & rursum divisi per 3 fiunt $5xx - 4x - 5$. Et hi multiplicati per progressionem 2. 1. 0, & divisi per $2x$ fiunt $5x - 2$. Jam cum terminus æquationis altissimus x^5 affirmativus sit, tento quinam numerus scriptus in his productis pro x, efficiet ea omnia affirmativa esse. Et quidem tentando 1, fit $5x - 2 = 3$ affirmativum sed $5xx - 4x - 5$, fit -4 negativum. Quare limes erit major quam 1. Tento itaque numerum aliquem majorem puta 2. Et in singulis substituendo 2 pro x, evadunt

$$5x - 2 = 8$$
$$5xx - 4x - 5 = 7$$
$$5x^3 - 6xx - 15x + 15 = 1$$
$$5x^4 - 8x^3 - 30xx + 60x + 63 = 79$$
$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 46.$$

Quare cum numeri prodeuntes 8. 7. 1. 79. 46, sint omnes affirmativi, erit numerus 2 major quam radicum affirmativarum maxima. Similiter si limitem negativarum radicum invenire vellem, tento numeros negativos. Vel quod perinde est muto signa terminorum alternorum & tento affirmativos. Mutatis autem terminorum alternorum signis, quantitates in quibus numeri substituendi sunt fient

$$5x + 2$$
$$5xx + 4x - 5$$
$$5x^3 + 6xx - 15x - 15$$
$$5x^4 + 8x^3 - 30xx - 60x + 63$$
$$x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 30xx + 63x + 120.$$

Ex his seligo quantitatem aliquam ubi termini negativi maxime prævalere videntur; puta $5x^4 + 8x^3$

—30

$-30xx-60x+63$, & hic ſubſtituendo pro x numeros 1 & 2 prodeunt numeri negativi -14 & -33. Unde limes erit major quam -2. Subſtituendo autem numerum 3 prodit numerus affirmativus 234. Et ſimiliter in cæteris quantitatibus ſubſtituendo numerum 3 pro x prodit ſemper numerus affirmativus. Id quod ex inſpectione ſola colligere licet. Quare numerus -3 tranſcendit omnes radices negativas. Atque ita habentur limites 2 & -3 inter quos radices omnes conſiſtunt.

Horum vero limitum inventio uſui eſt tum in reductione æquationum per radices rationales, tum in extractione radicum ſurdarum ex ipſis; ne forte radicem extra hos limites aliquando quæramus. Sic in æquatione noviſſima ſi radices rationales, ſiquas forte habeat, invenire vellem; ex ſuperioribus certum eſt has non alias eſſe poſſe quam diviſores ultimi termini æquationis, qui hic eſt 120. Proin tentando omnes ejus diviſores, ſi nullus earum ſcriptus in æquatione pro radice x efficeret omnes terminos evaneſcere; certum eſt æquationem non admittere radicem niſi quæ ſit ſurda. At ultimi termini 120, diviſores permulti ſunt, nimirum 1. -1. 2. -2. 3. -3. 4. -4. 5. -5. 6. -6. 8. -8. 10. -10. 12. -12. 15. -15. 20. -20. 24. -24. 30. -30. 40. -40. 60. -60. 120. & -120. Et hos omnes diviſores tentare, tædio eſſet. Cognito autem quod radices inter limites 2 & -3 conſiſtunt, liberamur à tanto labore. Jam enim non opus erit diviſores tentare niſi qui ſunt inter hos limites, nimirum diviſores 1, -1, & -2. Nam ſi horum nullus radix eſt, certum eſt æquationem non habere radicem niſi quæ ſit ſurda.

Æquationum reductio per divisores surdos.

HActenus reductionem æquationum tradidi quæ rationales divisores admittunt. Sed antequam æquationem quatuor, sex, aut plurium dimensionum irreducibilem esse concludere possumus, tentandum erit etiam annon per surdum aliquem divisorem reduci queat; vel quod perinde est, tentandum erit annon æquatio ita in duas æquales partes dividi possit ut ex utraque radix extrahatur. Id autem fiet per sequentem methodum.

Dispone æquationem secundum dimensiones literæ alicujus, ita ut omnes ejus termini sub signis suis conjunctim æquales sint nihilo, & terminus altissimus affirmativo signo afficiatur. Deinde si æquatio quadratica *sit (nam & hunc casum ob rei analogiam adjicere lubet) aufer utrobique terminum infimum, & adde quartam partem quadrati cognitæ quantitatis termini medii.*

Ut si æquatio sit $xx - ax - b = 0$, aufer utrobique $-b$ & adde $\frac{1}{4}aa$, & emerget $xx - ax + \frac{1}{4}aa = b + \frac{1}{4}aa$, *& extracta utrobique radice fiet* $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$, sive $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$.

Quod si æquatio sit quatuor dimensionum, *sit ea* $x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, ubi $p, q, r,$ & s, *denotant cognitas quantitates terminorum æquationis signis propriis adfectas. Fac*

$$q - \tfrac{1}{4}pp = \alpha. \quad r - \tfrac{1}{2}\alpha p = \beta.$$
$$s - \tfrac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta.$$

Dein

Dein pone pro n communem aliquem terminorum β *&* 2ζ *divisorem integrum, & non quadratum, qui & impar esse debet & per 4 divisus unitatem relinquere, si terminorum p & r alteruter sit impar. Pone etiam pro k divisorem aliquem quantitatis* $\frac{\beta}{n}$ *si p sit par; vel imparis divisoris dimidium si p sit impar; vel nihil, si dividuum* β *sit nihil. Aufer Quotum de* $\frac{1}{2}pk$, *& reliqui dimidium dic l. Dein pro Q pone* $\frac{\alpha + nkk}{2}$, *& tenta si n dividat* $QQ - s$, *& Quoti radix sit rationalis & aequalis l. Si hoc contigerit ad utramque partem aequationis adde* $nkkxx + 2nklx + nll$, *& radicem extrahes utrobique, prodeunte* $xx + \frac{1}{2}px + Q = n^{\frac{1}{2}}$ *in* $kx + l$.

Exempli gratia, proponatur æquatio $x^4 + 12x - 17 = 0$, & quia p & q hic desunt, & r est 12, & s est -17, substitutis hisce numeris fiet $\alpha = 0$, $\beta = 12$, & $\zeta = -17$, & ipsorum β & 2ζ seu 12 & -34 communis divisor unicus, nimirum 2, erit n. Porro $\frac{\beta}{n}$ est 6, & ejus divisores 1, 2, 3, & 6 successive tentandi sunt pro k, & -3, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$ pro l respective. Est autem $\frac{\alpha + nkk}{2}$ id est kk æquale Q. Est & $\sqrt{\frac{QQ - s}{n}}$, id est $\sqrt{\frac{QQ + 17}{2}} = l$. Ubi numeri pares 2 & 6 scribuntur pro k, Q fit 4 & 36, & $QQ - s$ numerus erit impar adeoque dividi non potest per n seu 2. Quare numeri illi 2 & 6 rejiciendi sunt. Ubi vero 1 & 3 scribuntur pro k, Q fit 1 & 9, & $QQ - s$ fit 18 & 98, qui numeri dividi possunt per n, & quotorum radices extrahi. Sunt enim ± 3 & ± 7: quarum tamen sola -3 congruit cum l. Pono itaque

que $k=1$, $l=-3$, & $Q=1$, & quantitatem $nkkxx+2nklx+nll$, id est $2xx-12x+18$, addo ad utramque partem æquationis, & prodit $x^4+2xx+1=2xx-12x+18$, & extracta utrobique radice, $xx+1=x\sqrt{2}-3\sqrt{2}$. Quod si radicis extractionem effugere malueris pone $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$, & invenietur ut ante $xx+1=\pm\sqrt{2}\times\overline{x-3}$. Et ex hac æquatione si radices iterum extrahas proveniet $x=$ $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\pm\sqrt{\frac{-1}{2}\mp3\sqrt{2}}$, *h. e.* secundum signorum variationes, $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$, & $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $-\sqrt{3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$. Item $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{-3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$, & $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{-3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$. Quæ quidem quatuor sunt radices æquationis sub initio propositæ $x^4+12x-17=0$. Sed earum ultimæ duæ sunt impossibiles.

Proponamus jam æquationem $x^4-6x^3-58xx-114x-11=0$, & scribendo -6, -58, -114, & -11 pro p, q, r, & s respective, orietur $-67=\alpha$, $-315=\beta$, & $-1133\frac{1}{4}=\zeta$. Numerorum β & 2ζ, seu -315 & $-\frac{4533}{2}$, communis divisor est unicus 3, adeoque hic erit n, & ipsius $\frac{\beta}{n}$ seu -105 divisores sunt 3, 5, 7, 15, 21, 35, & 105, qui itaque tentandi sunt pro k. Quare tento primum 3, & quotum -35, qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k seu -105 per 3, subduco de $\frac{1}{2}pk$, seu -3×3, & restat 26; cujus dimidium 13 esse debet

debet l. Sed $\frac{\alpha + nkk}{2}$, ſeu $\frac{-67+27}{2}$ id eſt -20 erit Q, & $QQ - s$ erit 411, qui dividi poteſt per n ſeu 3, ſed quoti 137 radix non poteſt extrahi. Quamobrem rejicio 3 & tento 5 pro k. Quotus qui jam prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, ſeu -105 per 5, eſt -21, & hunc ſubducendo de $\frac{1}{2}pk$ ſeu -3×5 reſtat 6, cujus dimidium 3 erit l. Eſt & Q ſeu $\frac{\alpha + nkk}{2}$ id eſt $\frac{-67 + 75}{2}$ numerus 4. Et $QQ - s$, ſeu $16 + 11$ dividi poteſt per n; & Quoti, qui eſt 9, radix extracta 3 congruit cum l. Quamobrem concludo eſſe $l = 3$, $k = 5$, $Q = 4$, & $n = 3$, & ſi $nkkxx + 2nklx + nll$, id eſt $75xx + 90x + 27$ ad utramque partem æquationis addatur, radicem utrobique extrahi poſſe, & prodire $xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n} \times \overline{kx + l}$, ſeu $xx - 3x + 4 = \pm\sqrt{3} \times \overline{5x + 3}$, & extracta iterum radice $x = \frac{3 \pm 5\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{17 \pm \frac{21\sqrt{3}}{2}}$.

Haud ſecus ſi proponatur æquatio hæcce $x^4 - 9x^3 + 15xx - 27x + 9 = 0$, ſcribendo -9, $+15$, -27, & $+9$, pro p, q, r, & s reſpective, emerget $-5\frac{1}{4} = \alpha$, $-50\frac{5}{8} = \beta$, & $2\frac{7}{64} = \zeta$. Ipſorum β & 2ζ, ſeu $-\frac{405}{8}$ & $\frac{135}{32}$ communes diviſores ſunt 3, 5, 9, 15, 27, 45, & 135; ſed 9 quadratus eſt, & 3, 15, 27, 135 diviſi per numerum 4 non relinquunt unitatem, ut ob imparem terminum p oporteret. His itaque rejectis reſtant ſoli 5 & 45 tentandi pro n. Ponamus primo $n = 5$, & ipſius $\frac{\beta}{n}$ ſeu $-\frac{81}{8}$ diviſores impares dimidiati nempe $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{2}$, $\frac{81}{2}$, tentandi erunt pro

pro k. Si k ponatur $\frac{1}{2}$, quotus $-\frac{81}{4}$ qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, ſubductus de $\frac{1}{2}pk$ ſeu $-\frac{9}{4}$ relinquit 18 pro $2l$, & $\frac{\alpha+nkk}{2}$ ſeu -2 eſt Q, & $QQ-s$, ſeu -5 dividi quidem poteſt per n ſeu 5, ſed Quoti negativi -1 radix impoſſibilis eſt, quæ tamen deberet eſſe 9. Quare concludo k non eſſe $\frac{1}{2}$ & tento jam ſi ſit $\frac{3}{2}$. Quotum qui oritur dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k ſeu $-\frac{81}{8}$ per $\frac{3}{2}$ nempe Quotum $-\frac{27}{4}$ ſubduco de $\frac{1}{2}pk$ ſeu $-\frac{27}{4}$ & reſtat o. Unde l jam nihil erit. Eſt autem $\frac{\alpha+nkk}{2}$ ſeu 3 æqualis Q, & $QQ-s$ nihil eſt; unde rurſus l, qui hujus $QQ-s$ diviſi per n radix eſt, invenitur nihil. Quamobrem his ita quadrantibus concludo eſſe $n=5$, $k=\frac{3}{2}$, $l=0$, & $Q=3$, adeoque addendo ad utramque partem æquationis propoſitæ terminos $nkkxx+2nlkx+nll$ id eſt $\frac{45}{4}xx$, & radicem quadraticam utrobique extrahendo prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$, id eſt $xx-4\frac{1}{2}x+3=\sqrt{5}\times\frac{3}{2}x$.

Eadem methodo reducuntur etiam æquationes literales. Ut ſi fuerit $x^4-2ax^3\begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix}xx-2a^3x+a^4=0$, ſubſtituendo $-2a$, $2aa-cc$, $-2a^3$ & $+a^4$ pro p, q, r, & s reſpective, obtinebuntur $aa-cc=\alpha$, $-4cc-a^3=\beta$, & $\frac{3}{4}a^4+\frac{1}{2}aacc-\frac{1}{4}c^4=\zeta$. Quantitatum β & 2ζ diviſor communis eſt $aa+cc$ qui proinde erit n; & $\frac{\beta}{n}$ ſeu $-a$ diviſores habet 1 & a. Sed quia n duarum eſt dimenſionum, & $k\sqrt{n}$ non niſi unius eſſe debet, ideo k nullius erit, adeo-

adeoque non potest esse a. Sit ergo $k = 1$, & diviso $\frac{\beta}{n}$ per k aufer quotum $-a$ de $\frac{1}{2}pk$ seu $-a$ & restabit nihil pro l. Porro $\frac{\alpha + nkk}{2}$ seu aa est Q, & QQ $- s$ seu $a^4 - a^4$ nihil est; & inde rursus prodit nihil pro l. Quod arguit quantitates n, k, l, & Q recte inventas esse; & additis ad utramque partem æquationis propositæ terminis $nkkxx + 2nklx + nll$, id est $aaxx + ccxx$, radicem utrobique extrahi posse, & extractione illa prodire $xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n} \times \overline{kx + l}$, id est $xx - ax + aa = \pm x\sqrt{aa + cc}$. Et extracta iterum radice $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} +$ vel $- \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$.

Hactenus regulam applicui ad extractionem *radicum surdarum*: potest tamen eadem ad extractionem etiam *rationalium* applicari, si modo pro quantitate n usurpetur unitas; eoque pacto una vice examinare possumus utrum æquatio fractis & surdis terminis carens divisorem aliquem duarum dimensionum aut rationalem aut surdum admittat. Ut si æquatio $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$ proponatur, substituendo -1, -5, $+12$, & -6, pro p, q, r, & s respective invenientur $-5\frac{1}{4} = \alpha$, $9\frac{3}{8} = \beta$, & ponendo $n = 1$, Quantitatis $\frac{\beta}{n}$ seu $\frac{75}{8}$ divisores sunt 1, 3, 5, 15, 25, 75: quorum dimidia (siquidem p sit impar) tentanda sunt pro k. Et si pro k tentemus $\frac{5}{2}$, fiet $\frac{1}{2}pk - \frac{\beta}{nk} = -5$, &

ejus

ejus dimidium $-\frac{5}{2}=l$. Item $\frac{\alpha+nkk}{2}=\frac{1}{2}=Q$, & $\frac{QQ-s}{n}=6\frac{1}{4}$, cujus radix congruit cum l.

Concludo itaque quantitates n, k, l, Q recte inventas esse; & additis ad utramque partem æquationis terminis $nkkxx+2nklx+nll$, id est $6\frac{1}{4}xx-12\frac{1}{2}x+6\frac{1}{4}$, radicem utrobique extrahi posse; & extractione illa prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\pm\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$, id est $xx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=\pm1\times\overline{2\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}}$, seu $xx-3x+3=0$, & $xx+2x-2=0$, adeoque per hasce duas æquationes quadraticas, æquationem propositam quadrato-quadraticam dividi posse. Sed hujusmodi divisores rationales expeditius inveniuntur per aliam methodum supra traditam.

Siquando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ multi sunt divisores ita ut omnes pro k tentare molestum fuerit, potest eorum numerus cito minui quærendo omnes divisores quantitatis $\alpha s-\frac{1}{4}rr$. Nam horum alicui aut imparis alicujus dimidio debet quantitas Q æqualis esse. Sic in exemplo novissimo $\alpha s-\frac{1}{4}rr$ est $-\frac{9}{2}$, è cujus divisoribus 1, 3, 9 aut iisdem dimidiatis $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, aliquis debet esse Q. Quare sigillatim tentando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ divisores dimidiatos $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{25}{2}$, & $\frac{75}{2}$ pro k, rejicio omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}nkk$, seu $-\frac{21}{8}+\frac{1}{2}kk$; id est Q esse aliquem è numeris 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$. Scribendo autem $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, &c. pro k, prodeunt respective $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{51}{2}$, &c. pro Q, è quibus soli $-\frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2}$ reperiuntur in prædictis numeris, 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, adeoque,

adeoque, cæteris rejectis, aut erit $k = \frac{3}{2}$, & $Q = -\frac{3}{2}$ aut $k = \frac{5}{2}$, & $Q = \frac{1}{2}$. Qui duo casus examinentur. Atque hactenus de æquationibus *quatuor* dimensionum.

Si æquatio sex *dimensionum reducenda est*, sit ea $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v = 0$, & fac

$$q - \tfrac{1}{4}pp = \alpha. \quad r - \tfrac{1}{2}p\alpha = \beta. \quad s - \tfrac{1}{2}p\beta = \gamma.$$
$$\gamma - \tfrac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta. \quad t - \tfrac{1}{2}\alpha\beta = \eta. \quad v - \tfrac{1}{4}\beta\beta = \theta.$$
$$\zeta\theta - \tfrac{1}{4}\eta\eta = \lambda.$$

Dein sumatur pro n, communis aliquis terminorum 2ζ, η, 2θ divisor integer & non quadratus, nec per numerum quadratum divisibilis, qui etiam per numerum 4 divisus relinquit unitatem; si modo terminorum p, r, t aliquis sit impar. Pro k sumatur divisor aliquis integer quantitatis $\frac{\lambda}{2nn}$ si p sit par, vel divisoris imparis dimidium si p sit impar, vel nihil si λ nihil sit. Pro Q, quantitas $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nkk$. Pro l divisor aliquis quantitatis $\frac{Qr - QQp - t}{n}$ si Q sit integer; vel divisoris imparis dimidium si Q sit fractus denominatorem habens numerum 2; vel nihil si dividuum istud $\frac{Qr - QQp - t}{n}$ sit nihil. Et pro R quantitas $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}Qp + nkl$. Dein tenta si $RR - v$ dividi possit per n, & Quoti radix extrahi; & præterea si radix ista æqualis sit tam quantitati $\frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl}$ quam quantitati $\frac{QQ + pR - nll - s}{2nk}$. Si hæc omnia evenerint, dic radicem illam m; & vice æquationis propositæ scribe hanc $x^3 + \frac{1}{2}pxx + Qx + R = \pm\sqrt{n} \times \overline{kxx + lx + m}$. Etenim

hæc

hæc æquatio, quadrando partes & auferendo utrobique terminos ad dextram, producet æquationem propositam Quod si ea omnia in nullo casu evenerint, reductio erit impossibilis, si modò prius constet æquationem per divisorem rationalem reduci non posse.

Exempli gratia, proponatur æquatio $x^6 - 2ax^5 + 2bbx^4 + 2abbx^3 \begin{matrix} -2aabb \\ +2a^3b \\ -4ab^3 \end{matrix} xx \begin{matrix} +3aab^4 \\ -a^4bb \end{matrix} = 0$,

& scribendo $-2a$, $+2bb$, $+2abb$, $-2aabb + 2a^3b - 4ab^3$, 0, & $3aab^4 - a^4bb$ pro p, q, r, s, t, & v respective, prodibunt $2bb - aa = \alpha$. $4abb - a^3 = \beta$. $2a^3b + 2aabb - 4ab^3 - a^4 = \gamma$. $-b^4 + 2a^3b + 3aabb - 4ab^3 - \frac{5}{4}a^4 = \zeta$. $-\frac{1}{2}a^5 + 3a^3bb - 4ab^4 = \eta$. & $-aab^4 + a^4bb - \frac{1}{4}a^6 = \theta$. Et terminorum 2ζ, η, & 2θ communis divisor est $aa - 2bb$, seu $2bb - aa$ perinde ut aa vel $2bb$ majus sit. Sed esto aa majus quam $2bb$, & $aa - 2bb$ erit n. Debet enim n semper affirmativum esse. Porro $\frac{\zeta}{n}$ est $-\frac{5}{4}aa + 2ab + \frac{1}{2}bb$, $\frac{\eta}{n}$ est $-\frac{1}{2}a^3 + 2abb$, & $\frac{\theta}{n}$ est $-\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aabb$; adeoque $\frac{\zeta}{2n} \times \frac{\theta}{n} - \frac{\eta\eta}{8nn}$ seu $\frac{\lambda}{2nn}$ est $\frac{1}{8}a^6 - \frac{1}{4}a^5b - \frac{1}{8}a^4bb + \frac{1}{2}a^3b^3 - \frac{3}{8}aab^4$, cujus divisores sunt 1, a, aa; sed quia $\sqrt{n} \times k$ non nisi unius dimensionis esse potest, & $\sqrt{n}$ unius est, ideo k nullius erit; proinde non nisi numerus esse potest. Quare rejectis a & aa, restat solum 1 pro k. Præterea $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nkk$ dat nihil pro Q, & $\frac{Qr - QQp - t}{n}$ etiam nihil est; adeoque l,

qui

qui ejus divisor esse debet, erit nihil. Denique $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}pQ + nkl$ dat abb pro R. Et $RR - v$, est $-2aab^4 + a^4bb$, quod dividi potest per n seu $aa - 2bb$, & quoti $aabb$ radix extrahi, & radix illa negative sumpta, nempe $-ab$, indefinitæ quantitati $\frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl}$ seu $\frac{0}{0}$ non est inæqualis, quantitati vero definitæ $\frac{QQ + pR - nll - s}{2nk}$ æqualis est. Quamobrem radix illa $-ab$ erit m; & loco æquationis propositæ scribi potest $x^3 + \frac{1}{2}pxx + Qx + R = \sqrt{n} \times \overline{kxx + lx + m}$, i.e. $x^3 - axx + abb = \sqrt{aa - 2bb} \times \overline{xx - ab}$. Cujus conclusionis veritatem probare potes quadrando partes æquationis inventæ & auferendo terminos ad dextram ex utraque parte. Ea enim operatione producetur æquatio $x^6 - 2ax^5 + 2bbx^4 + 2abbx^3 - 2aabbxx + 2a^3bxx - 4ab^3xx + 3aab^4 - a^4bb = 0$, quæ reducenda proponebatur.

Si æquatio est octo *dimensionum sit ea* $x^8 + px^7 + qx^6 + rx^5 + sx^4 + tx^3 + vxx + wx + z = 0$, & fiat $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$. $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$. $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{2}\alpha\alpha = \gamma$. $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$. $v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \varepsilon$. $w - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$. & $z - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta$. Et terminorum 2δ, 2ε, 2ζ, 8η, quære communem divisorem qui integer sit, & non quadratus nec per quadratum divisibilis, quique etiam per 4 divisus relinquat unitatem, si modo terminorum alternorum p, r, t, w aliquis sit impar. Si nullus est ejusmodi divisor communis, certum est æquationem per extractionem surdæ radicis quadraticæ reduci non posse, & si non potest ea ita reduci, vix occurret illarum omnium quatuor quantitatum divisor communis. Opusculum igitur hactenus institutum examinatio quædam est utrum æquatio reducibilis sit necne, adeoque cum

ejusmodi reductiones raro possibiles sint, finem operi ut plurimum imponet.

Et simili ratione si æquatio sit decem, duodecim, vel plurium dimensionum, impossibilitas reductionis cognosci potest.

Ut si ea sit $x^{10} + px^9 + qx^8 + rx^7 + sx^6 + tx^5 + vx^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$, faciendum erit $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$, $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$, $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$, $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$, $v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \varepsilon$, $a - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$, $b - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta$, $c - \frac{1}{2}\gamma\delta = \theta$, $d - \frac{1}{4}\delta\delta = \varkappa$, & quærendus communis divisor terminorum quinque 2ε, 2ζ, 8η, 4θ, $8\varkappa$, qui integer sit & non quadratus, quique etiam per 4 divisus relinquat unitatem si modo terminorum alternorum p, r, t, a, c aliquis sit impar.

Sic si *duodecim* dimensionum æquatio sit $x^{12} + px^{11} + qx^{10} + rx^9 + sx^8 + tx^7 + vx^6 + ax^5$ $bx^4 + cx^3 + dxx + ex + f = 0$, faciendum erit $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$, $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$, $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$, $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$, $v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \varepsilon$, $a - \frac{1}{2}p\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$, $b - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta$, $c - \frac{1}{2}\beta\varepsilon - \frac{1}{2}\gamma\delta = \theta$, $d - \frac{1}{2}\gamma\varepsilon - \frac{1}{4}\delta\delta = \varkappa$, $e - \frac{1}{2}\delta\varepsilon = \lambda$, $f - \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon = \mu$, & quærendus communis divisor integer & non quadratus terminorum sex 2ζ, 8η, 4θ, $8\varkappa$, 4λ, 8μ qui per 4 divisus relinquat unitatem, si modo terminorum alternorum p, r, t, a, c, e aliquis sit impar.

Atque ita in infinitum progredi licebit, & æquatio proposita semper per extractionem surdæ radicis quadraticæ irreducibilis erit ubi ejusmodi divisor communis nullus est. Siquando vero ejusmodi divisor n inventus spem faciat futuræ reductionis, potest ea institui insistendo vestigiis operis quod in æquatione octo dimensionum subjungimus.

Quære

Quære numerum quadratum cui per n multiplicato ultimus æquationis terminus z, sub signo proprio adnexus quadratum numerum efficit. Id autem expedite fiet si ad z ubi n est par vel ad $4z$ ubi n est impar successive addantur n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, $11n$, & deinceps donec summa æqualis fiat numero alicui in tabula numerorum quadratorum quam ad manus esse suppono. Et si nullus ejusmodi quadratus numerus prius occurrit quam summæ illius radix quadratica aucta radice quadratica excessus illius summæ supra ultimum æquationis terminum, quadruplo major sit quam maximus terminorum æquationis propositæ p, q, r, s, t, v, &c. non opus erit rem ultra tentare. Æquatio enim reduci non potest. Sed si ejusmodi numerus quadratus prius occurrit, sit ejus radix S, si n est par, vel 2 S si n est impar; & $\sqrt{\frac{SS-z}{n}}$ dic h. Debent autem s & h esse numeri integri si n est par, at si n impar est, possunt esse fracti denominatorem habentes numerum binarium. Et si unus eorum fractus est, alter fractus esse debet. Quod idem de numeris R & m, Q & l, p & k, post inveniendis observandum est. Et omnes numeri S & h, qui intra præfatum limitem inveniri possunt in catalogum referendi sunt.

Postea pro k tentandi sunt omnes numeri successive qui non efficiunt $nk \pm \frac{1}{2}p$, quadruplo majus quam maximus terminus æquationis, & ponendum est in omni casu $\frac{nkk+\alpha}{2}=Q$. Dein pro l tentandi sunt successive numeri omnes qui non efficiunt $nl \pm Q$, quadruplo majus quam maximus terminus æquationis, & in omni tentamine ponendum $\frac{-npkk+2\beta}{4}+nkl=R$. Denique pro m

tentandi sunt successive omnes numeri qui non efficiunt $nm \pm R$ quadruplo majus quam maximus terminorum æquationis, & videndum an in casu quovis si fiat $s - QQ - pR + nll = 2H$, & $H + nkm = S$, sit S aliquis numerorum qui prius pro S in Catalogum relati erant; & præterea si alter numerus ei S respondens, qui pro h in eundem Catalogum relatus erat sit his tribus $\frac{2RS - w}{2nm}$, $\frac{2QS + RR - v - nmm}{2nl}$ & $\frac{pS + 2QR - t - 2nlm}{2nk}$ æqualis. Si hæc omnia in aliquo casu evenerint, vice æquationis propositæ scribenda erit hæcce $x^4 + \frac{1}{2}px^3 + Qxx + Rx + S = \sqrt{n} \times \overline{kx^3 + lxx + mx + h}$.

Exempli gratia proponatur æquatio $x^8 + 4x^7 - x^6 - 10x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 10xx - 10x - 5 = 0$. Et erit $q - \frac{1}{4}pp = -1 - 4 = -5 = \alpha$. $r - \frac{1}{2}p\alpha = -10 + 10 = 0 = \beta$. $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = 5 - \frac{25}{4} = -\frac{5}{4} = \gamma$. $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = -5 + \frac{5}{2} = -\frac{5}{2} = \delta$. $v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = -10 - \frac{25}{8} = -\frac{105}{8}$. $w - \frac{1}{2}\beta\gamma = -10 = \zeta$. $z - \frac{1}{4}\gamma\gamma = -5 - \frac{25}{64} = -\frac{345}{64} = \eta$. Ergo $2\delta, 2\varepsilon, 2\zeta, 8\eta$, respective, sunt -5, $-\frac{105}{4}$, -20, & $-\frac{345}{8}$, & earum divisor communis 5, qui per 4 divisus relinquit 1, perinde ut ob terminum imparem s oportuit. Cum itaque inventus sit divisor communis n seu 5 qui spem facit futuræ reductionis, quoniam iste impar est, ad $4z$ seu -20 successive addo n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, &c. seu 5, 15, 25, 35, 45, &c. & prodeunt -15. 0. 25. 60. 105. 160. 225. 300. 385. 480. 585. 700. 825. 960. 1105. 1260. 1425. 1600. Ex quibus solum 0. 25. 225, & 1600 quadrati sunt. Quare horum radices dimidiatæ 0, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, 20, in catalogum referendæ sunt pro S, & $\sqrt{\frac{SS - z}{n}}$, id

est

est 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, 9, respective pro h. Sed quia $S + nh$ si scribatur 20 pro S & 9 pro h, fit 65 numerus major quadruplo maximi terminorum æquationis, ideo rejicio 20 & 9, & reliquos solum refero in tabulam ut sequitur.

$h \mid 1.\ \frac{3}{2}.\ \frac{7}{2}.$

$S \mid 0.\ \frac{5}{2}.\ \frac{15}{2}.$

His ita dispositis, tento pro k numeros omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2}p \pm nk$ seu $2 \pm 5k$ majus quadruplo maximi termini æquationis 40, id est numeros $-8.\ -7.\ -6.\ -5.\ -4.\ -3.\ -2.\ -1.\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7$, ponendo $\frac{nkk + \alpha}{2}$ seu $\frac{5kk - 5}{2}$ id est numeros $\frac{315}{2}.\ 120.\ \frac{175}{2}.\ 60.\ \frac{75}{2}.\ 20.\ \frac{15}{2}.\ 0.\ -\frac{5}{2}.\ 0.\ \frac{15}{2}.\ 20.\ \frac{75}{2}.\ 60.\ \frac{175}{2}.\ 120.$ respective pro Q. Imo vero cum $Q \pm nl$, & multo magis Q non debeat majus esse quam 40, rejiciendos esse sentio $\frac{315}{2}.\ 120.\ \frac{175}{2}$ & 60, & qui his respondent $-8.\ -7.\ -6.\ -5.\ 5.\ 6.\ 7.$ adeoque solos $-4.\ -3.\ -2.\ -1.\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4$ pro k & $\frac{75}{2}.\ 20.\ \frac{15}{2}.\ 0.\ -\frac{5}{2}.\ 0.\ \frac{15}{2}.\ 20.\ \frac{75}{2}$ pro Q respective tentandos. Tentemus autem -1 pro k & 0 pro Q, & in hoc casu pro l tentandi deinceps erunt successive omnes numeri qui non efficiunt $Q \pm nl$ majus quam 40, id est omnes numeri inter 10 & -10, & pro R respective numeri $\frac{2\beta - npkk}{4} + nkl$, seu $-5 - 5l$ id est $-55.\ -50.\ -45.\ -40.\ -35.\ -30.\ -25.\ -20.\ -15.\ -10.\ -5.\ 0.\ 5.\ 10.\ 15.\ 20.\ 25.\ 30.\ 35.\ 40.\ 45$, quorum tamen tres priores & ultimum quia majores quam 40 negligere licebit. Tentemus autem -2 pro l & 5 pro R, & in hoc casu pro m tentandi præterea erunt omnes numeri qui non efficiunt $R \pm nm$ seu $5 \pm 5m$ majus quam 40, id est numeri omnes inter 7 & -9, & videndum an si ponendo $s - QQ - pR + nll$, id est $5 - 20 + 20$ seu $5 = 2H$, sit

sit $H+nkm$ seu $\frac{5}{2}-5m=S$, id est si ex his numeris $\frac{-65}{2}. \frac{-55}{2}. \frac{-45}{2}. \frac{-35}{2}. \frac{-25}{2}. \frac{-15}{2}. \frac{-5}{2}. \frac{5}{2}. \frac{15}{2}. \frac{25}{2}. \frac{35}{2}. \frac{45}{2}. \frac{55}{2}. \frac{65}{2}. \frac{75}{2}. \frac{85}{2}$, aliquis æqualis sit alicui numerorum $0. \pm\frac{5}{2}. \pm\frac{15}{2}$ qui prius in tabulam pro S relati erant. Et hujusmodi quatuor occurrunt $-\frac{15}{2}. -\frac{5}{2}. \frac{5}{2}. \frac{15}{2}$ quibus respondent $\pm\frac{7}{2}. \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}. \pm\frac{7}{2}$ pro h in eadem tabula scripti, ut & $2.1.0.-1$ pro m substitui. Verum tentemus $-\frac{5}{2}$ pro S, 1 pro m, & $\pm\frac{3}{2}$ pro h, & fiet $\frac{2RS-w}{2nm}=\frac{-25+10}{10}=-\frac{3}{2}$, & $\frac{2QS+RR-v-nmm}{2nl}=\frac{25+10-5}{-20}=-\frac{3}{2}$, & $\frac{pS+2QR-t-2nlm}{2nk}=\frac{-10+5+20}{-10}=-\frac{3}{2}$. Quare cum prodeat omni casu $-\frac{3}{2}$ seu h, concludo numeros omnes recte inventos esse, adeoque vice æquationis propositæ scribendum esse $x^4+\frac{1}{2}px^3+Qxx+Rx+S=\sqrt{n}\times\overline{kx^3+lxx+mx+h}$, id est $x^4+2x^3+5x-2\frac{1}{2}=\sqrt{5}\times\overline{-x^3-2xx+x-1\frac{1}{2}}$. Etenim quadrando partes hujus, producetur æquatio illa octo dimensionum quæ sub initio proponebatur.

Quod si tentando casus omnes numerorum, prædicti valores omnes ipsius h nullo in casu inter se consensissent, argumento fuisset æquationem per extractionem surdæ radicis quadraticæ reduci non potuisse.

Deberent autem aliqua hic in operis abbreviationem annotari, sed quæ brevitatis causa prætereo, cum tantarum reductionum perexiguus sit usus, & rei possibilitatem potius quam praxin commodissimam voluerim exponere. Sunt igitur hæ reductiones æquationum per extractionem *surdæ radicis quadraticæ.*

Ad-

Adjungere jam liceret reductiones æquationum per *extractionem surdæ radicis cubicæ*, sed & has, ut quæ perraro utiles sint, brevitatis gratia prætereo.

Sunt tamen reductiones quædam *cubicarum æquationum* vulgo notæ, quas, si penitus præterirem, Lector fortasse desideraret. Proponatur æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, cujus secundus terminus deest. Ad hanc enim formam æquationem omnem cubicam reduci posse constat ex præcedentibus. Et supponatur x esse $= a + b$. Erit $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ (id est x^3) $+ qx + r = 0$. Sit $3aab + 3abb$ (id est $3abx$) $+ qx = 0$, & erit $a^3 + b^3 + r = 0$. Per priorem æquationem est $b = -\frac{q}{3a}$, & cubice $b^3 = -\frac{q^3}{27a^3}$. Ergo per posteriorem est $a^3 - \frac{q^3}{27a^3} + r = 0$, seu $a^6 + ra^3 = \frac{q^3}{27}$, & per extractionem affectæ radicis quadraticæ $a^3 = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$. Extrahe radicem cubicam & habebitur a. Et supra erat $-\frac{q}{3a} = b$, & $a + b = x$. Ergo $a - \frac{q}{3a}$ radix est æquationis propositæ.

Exempli gratia proponatur æquatio $y^3 - 6yy + 6y + 12 = 0$. Ad tollendum secundum æquationis hujus terminum ponatur $x + 2 = y$, & orietur $x^3 * - 6x + 8 = 0$, ubi est $q = -6$, $r = 8$, $\frac{1}{4}rr = 16$, $\frac{q^3}{27} = -8$, $a^3 = -4 \pm \sqrt{8}$, $a - \frac{q}{3a} = x$, & $x + 2 = y$, id est $2 + \sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}}} = y$.

Et hoc modo erui possunt radices omnium cubicarum æquationum ubi q affimativum est; vel etiam ubi q negativum est, & $\frac{q^3}{27}$ non majus quam $\frac{1}{4}rr$, *id est ubi duæ ex radicibus æquationis sunt impossibiles.* At ubi q negativum est, & $\frac{q^3}{27}$ simul majus quam $\frac{1}{4}rr$, fit $\sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{q^3}{27}}$ quantitas impossibilis, atque adeo æquationis radix x vel y, hoc casu impossibilis erit. Scilicet hoc casu *tres sunt radices possibiles* quæ omnes eodem modo se habent ad æquationis terminos q & r, & indifferenter designantur per literam x vel y, adeoque omnes eadem deberent lege erui & exprimi qua una aliqua eruitur & exprimitur: *Sed omnes tres lege præfata exprimere impossibile est.* Quantitas $a - \frac{q}{3a}$ qua x designatur multiplex esse non potest, eaque de causa Hypothesis quod x, hoc in casu ubi triplex est, æqualis esse potest binomio $a - \frac{q}{3a}$, seu $a + b$ cujus nominum cubi $a^3 + b^3$ conjunctim æquentur r, & triplum rectangulum $3ab$ æquetur q, plane impossibilis est; & ex hypothesi impossibili conclusionem impossibilem colligi mirum esse non debet.

Est & alius modus has radices exprimendi. Nimirum de $a^3 + b^3 + r$ id est de nihilo, aufer $a^3 + r$, seu $\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$, & restabit $b^3 = -\frac{1}{2}r \mp \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$. Est itaq; $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$,

&

& $b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$; vel $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$, & $b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$, adeoque horum summa $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$, erit $= x$.

Possunt etiam æquationum biquadraticarum radices mediantibus cubicis erui & exprimi.

Tollendus est autem primum secundus æquationis terminus. Sit æquatio resultans $x^4 + qxx + rx + s = 0$. Pone hanc multiplicatione duarum $xx + ex + f = 0$, & $xx - ex + g = 0$ generari, id est eandem esse cum hac $x^4 * \begin{matrix} +f \\ +g \\ -ee \end{matrix} xx \begin{matrix} +eg \\ -ef \end{matrix} x + fg = 0$, & collatis terminis fiet $f + g - ee = q$, $eg - ef = r$, & $fg = s$. Quare $q + ee = f + g$, $\frac{r}{e} = g - f$, $\frac{q + ee + \frac{r}{e}}{2} = g$. $\frac{q + ee - \frac{r}{e}}{2} = f$. $\frac{qq + 2eeq + e^4 - \frac{rr}{ee}}{4} (= fg) = s$, & per reductionem $e^6 + 2qe^4 \begin{matrix} +qq \\ -4s \end{matrix} ee - rr = 0$. Pro ee scribe y, & fiet $y^3 + 2qyy \begin{matrix} +qq \\ -4s \end{matrix} y - rr = 0$, æquatio cubica cujus terminus secundus tolli potest, & radix deinceps per regulam præcedentem vel secus extrahi. Dein habita illa radice regrediendum erit ponendo $\sqrt{y} = e$, $\frac{q + ee - \frac{r}{e}}{2} = f$, $\frac{q + ee + \frac{r}{e}}{2} = g$, & æquationes duæ $xx + ex + f = 0$, & $xx - ex + g$

$+g=0$, extractis earum radicibus dabunt quatuor radices æquationis biquadraticæ $x^4+qxx+rx+s=0$, nimirum $x=-\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}ee-f}$, & $x=\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}ee-g}$. Ubi notandum est quod si æquationis biquadraticæ radices quatuor possibiles sunt, æquationis cubicæ $y^3+2qyy\,\frac{+qq}{-4s}\,y-rr=0$ radices tres possibiles erunt, atque adeo per regulam præcedentem extrahi nequeunt. *Sic & si æquationis quinque vel plurium dimensionum radices affectæ in radices non affectas mediis æquationis terminis quoque pacto sublatis convertantur, illa radicum expressio semper erit impossibilis ubi plures quam una radix in æquatione imparium dimensionum possibiles sunt, aut plures quam duæ in æquatione parium dimensionum quæ per extractionem surdæ radicis quadraticæ methodo supra exposita reduci nequeunt.'*

Docuit *Cartesius* æquationem biquadraticam per regulas ultimo traditas reducere. *E. g.* proponatur æquatio à nobis supra reducta $x^4-x^3-5xx+12x-6=0$. Tolle secundum terminum scribendo $v+\frac{1}{4}$ pro x, & orietur $v^4-\frac{43}{8}vv+\frac{75}{8}v-\frac{851}{256}=0$. Ad tollendas fractiones scribe $\frac{1}{4}z$ pro v, & orietur $z^4-86zz+600z-851=0$. Hic est $-86=q$, $600=r$, & $-851=s$, adeoque $y^3+2qyy\,\frac{+qq}{-4s}\,y-rr=0$, substitutis æquipollentibus fiet $y^3-172yy+10800y-360000=0$. Ubi tentando omnes ultimi termini divisores $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5$, & deinceps usque ad 100 invenietur tandem $y=100$. Quod idem multo expeditius per methodum à nobis supra expositam invenire potuit. Dein habito y, radix ejus 10 erit e, & $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}$, id est $\frac{-86+100-60}{2}$,

seu

seu -23 erit f, & $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}$ seu 37 erit g, adeoque æquationes $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g=0$, scripto z pro x, & substitutis æquipollentibus evadent $zz+10z-23=0$, & $zz-10z+37=0$. Restitue v pro $\frac{1}{4}z$, & orientur $vv+2\frac{1}{2}v-\frac{23}{16}=0$, & $vv-2\frac{1}{2}v+\frac{37}{16}=0$. Restitue insuper $x-\frac{1}{4}$ pro v, & emergent $xx+2x-2=0$, & $xx-3x+3=0$, æquationes duæ quarum radices quatuor $x=-1\pm\sqrt{3}$, & $x=1\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}$, eædem sunt cum radicibus quatuor æquationis biquadraticæ sub initio propositæ $x^4-x^3-5xx+12x-6=0$. Sed hæ facilius per methodum inveniendi divisores à nobis supra explicatam invenire potuerunt.



ÆQUA-



ÆQUATIONUM

Constructio linearis.

HActenus æquationum proprietates; transmutationes, limites & omnis generis reductiones, docui. Demonstrationes non semper adjunxi quoniam satis faciles mihi visæ sunt, & nonnunquam absque nimiis ambagibus tradi non possent. Restat jam tantum ut æquationum postquam ad formam commodissimam reductæ sunt, radices in numeris extrahere doceam. Et hic præcipua difficultas est in figuris duabus vel tribus prioribus obtinendis. Id quod commodissime per æquationis constructionem aliquam seu Geometricam sive Mechanicam confit. Qua de causa non pigebit hujusmodi constructiones aliquas subjungere.

Veteres, ut ex Pappo discimus, trisectionem anguli, & inventionem duarum medie proportionalium, sub initio per rectam lineam & circulum, frustra aggressi sunt. Postea considerare cœperunt

alias

alias permultas lineas, ut Conchoidem, Cissoidem, & Conicas sectiones, & per harum aliquas solverunt Problemata. Tandem re penitius examinata, & Conicis sectionibus in Geometriam receptis Problemata distinxerunt in tria genera: *Plana* quæ per lineas, à plano originem derivantes, Rectam nempe & Circulum solvi possint; *Solida* quæ per lineas ortum à solidi id est Coni consideratione derivantes solvebantur; & *Linearia* ad quorum solutionem requirebantur lineæ magis compositæ. Et juxta hanc distinctionem, problemata solida per alias lineas quam Conicas sectiones solvere à Geometria alienum est; præsertim si nullæ aliæ lineæ præter rectam, circulum, & Conicas sectiones inGeometriam recipiantur. At Recentiores longius progressi receperunt lineas omnes in Geometriam quæ per æquationes exprimi possunt, & pro dimensionibus æquationum distinxerunt lineas illas in genera, legemque tulerunt non licere Problema per lineam superioris generis construere quod construi potest per lineam inferioris. In lineis contemplandis, & eruendis earum proprietatibus, distinctionem earum in genera juxta dimensiones æquationum per qnas definiuntur laudo. At æquatio non est, sed descriptio quæ curvam Geometricam efficit. Circulus linea Geometrica est, non quod per æquationem exprimi potest; sed quod descriptio ejus postulatur. Æquationis simplicitas non est, sed descriptionis facilitas, quæ lineam ad constructiones Problematum prius admittendam esse indicat. Nam æquatio ad Parabolam simplicior est quam æquatio ad circulum; & tamen circulus ob simpliciorem descriptionem prius admittitur. Circulus & Coni sectiones si æquationum dimensiones spectentur ejusdem sunt ordinis, & tamen circulus in constructione problematum non connumeratur

cum

cum his, sed ob simplicem descriptionem deprimitur ad ordinem inferiorem lineæ rectæ; ita ut per circulum construere quod per rectas construi potest, non sit illicitum; per Conicas vero sectiones construere quod per circulum construi potest vitio vertatur. Aut igitur legem à dimensionibus æquationum in circulo observandam esse statue, & sic distinctionem inter problemata plana & solida ut vitiosam tolle; aut concede legem illam in lineis superiorum generum non ita observandam esse quin aliquæ ob simpliciorem descriptionem præferantur aliis ejusdem ordinis, & in constructione Problematum cum lineis inferiorum ordinum connumerentur. In constructionibus quæ sunt æque Geometricæ præferendæ semper sunt simpliciores. Hæc lex omni exceptione major est. Ad simplicitatem vero constructionis expressiones Algebraicæ nil conferunt. Solæ descriptiones linearum hic in censum veniunt. Has solas considerabant Geometræ qui circulum conjungebant cum recta. Prout hæ sunt faciles vel difficiles constructio facilis vel difficilis redditur. Adeoque à rei natura alienum est leges constructionibus aliunde præscribere. Aut igitur lineas omnes præter rectam & circulum & forte Conicas sectiones è Geometria cum Veteribus excludamus, aut admittamus omnes secundum descriptionis simplicitatem. Si Trochoides in Geometriam reciperetur, liceret ejus beneficio angulum in data ratione secare. Numquid ergo reprehenderes siquis hac linea ad dividendum angulum in ratione numeri ad numerum uteretur, & contenderes hanc lineam per æquationem non definiri, lineas vero quæ per æquationes definiuntur adhibendas esse? Igitur si angulus *e.g.* in 10001 partes dividendus esset, teneremur curvam lineam æquatione plusquam centum dimensionum definitam in medium afferre, quam tamen nemo mortalium

lium deſcribere nedum intelligere valeret; & hanc anteponere Trochoidi quæ linea notiſſima eſt, & per motum rotæ vel circuli facillime deſcribitur. Quod quam abſurdum ſit quis non videt? Aut igitur Trochoides in Geometriam non eſt admittenda, aut in conſtructione Problematum curvis omnibus difficilioris deſcriptionis auteferenda. Et eadem eſt ratio de reliquis curvis. Quo nomine triſectiones anguli per Conchoidem quas *Archimedes* in Lemmatis & *Pappus* in collectionibus poſuere præ aliorum hac de re inventis omnibus laudamus; ſiquidem lineas omnes præter rectam & circulum è Geometria excludere debeamus, aut ſecundum deſcriptionis ſimplicitatem admittere, & Conchoides ſimplicitate deſcriptionis nulli curvæ præter circulum cedit. Æquationes ſunt expreſſiones computi Arithmetici, & in Geometria locum proprie non habent, niſi quatenus quantitates vere Geometricæ (id eſt lineæ, ſuperficies, ſolida & proportiones) aliquæ aliis æquales enunciantur. Multiplicationes, Diviſiones, & ejuſmodi computa in Geometriam recens introducta ſunt; idque inconſulto, & contra primum inſtitutum ſcientiæ hujus. Nam qui conſtructiones Problematum per rectam & circulum à primis Geometris adinventas conſiderabit, facile ſentiet Geometriam excogitatam eſſe ut expedito linearum ductu effugeremus computandi tædium. Proinde hæ duæ ſcientiæ confundi non debent. Veteres tam ſedulo diſtinguebant eas ab invicem, ut in Geometriam terminos Arithmeticos nunquam introduxerint. Et recentes utramque confundendo amiſerunt ſimplicitatem in qua Geometriæ elegantia omnis conſiſtit. Eſt itaque *Arithmetice* quidem ſimplicius quod per ſimpliciores æquationes determinatur, at *Geometrice* ſimplicius eſt quod per ſimpliciorem ductum linearum colligitur; & in Geometria prius

&

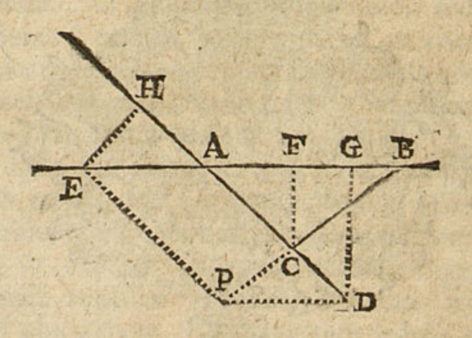
& præstantius esse debet quod est ratione Geometrica simplicius. Mihi igitur vitio vertendum non erit si cum Mathematicorum Principe, *Archimede*, aliisque Veteribus Conchoidem ad Solidorum problematum constructionem adhibeam. Attamen siquis aliter senserit, sciat me hic de constructione non Geometrica sed qualicunque sollicitum esse, qua radices æquationum in numeris proxime assequar. Cujus rei gratia præmitto hoc Problema Lemmaticum.



Inter datas duas lineas A B, A C rectam datæ longitudinis B C ponere quæ producta transeat per datum punctum P.

SI circa polum P gyret linea B C, & ſimul termino ejus C incedat ſuper recta A C, ejus alter terminus B deſcribet Conchoidem Veterum. Secet hæc lineam A B in puncto B. Junge P B, & ejus pars B C erit recta quam ducere oportuit. Et eadem lege linea B C duci poteſt ubi vice rectæ A C linea aliqua curva adhibetur.

Sicui conſtructio hæcce per Conchoidem minus placeat, poteſt alia per Conicam ſectionem ejus



vice ſubſtitui. A puncto P ad rectas A D, A E age P D, P E conſtituentes parallelogrammum E A D P, & à punctis C ac D ad rectam A B demitte perpendicula C F, D G, ut & à puncto E ad rectam A C verſus A productam perpendiculum E H, & dictis A D $= a$. P D $= b$. B C $= c$.

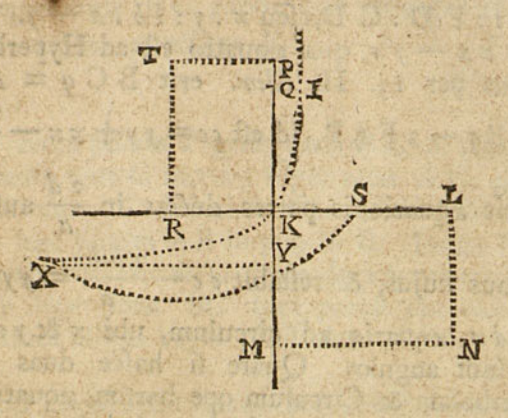
A G

AG = d, AB = x, & AC = y. Erit AD . AG :: AC . AF, adeoque AF = $\frac{dy}{a}$. Erit & AB . AC :: PD . CD, seu $x . y :: b . a - y$. Ergo $by = ax - yx$, quæ æquatio est ad Hyperbolam Rursus per 13. II. *Elem.* erit BCq = ACq + ABq − 2 FAB, id est $cc = yy + xx - \frac{2dxy}{a}$. Prioris æquationis partes ductas in $\frac{2d}{a}$ aufer de partibus hujus, & restabit $cc - \frac{2bdy}{a} = yy + xx - 2dx$, æquatio ad circulum, ubi x & y ad rectos sunt angulos. Quare si hasce duas lineas Hyperbolam & Circulum ope harum æquationum componas, earum intersectione habebis x & y, seu AB & AC quæ positionem rectæ BC determinant. Componentur autem lineæ illæ ad hunc modum.

Duc rectas duas quasvis KL æqualem AD, & KM æqualem PD continentes angulum rectum MKL. Comple parallelogrammum KLMN, & asymptotis LN, MN per punctum K describe Hyperbolam IKX.

In KM versus K producta cape KP æqualem AG & KQ æqualem BC. Et in KL producta versus K cape KR æqualem AH, & RS æqualem RQ. Comple parallelogrammum PKRT, & centro T intervallo TS describe circulum. Secet hic Hyperbolam in puncto X. Ad KP demitte perpendiculum XY, & erit XY æqualis

AC & KY æqualis AB. Quæ duæ lineæ AC & AB vel una earum cum puncto P determinant positionem quæsitam rectæ BC. Cui constructioni

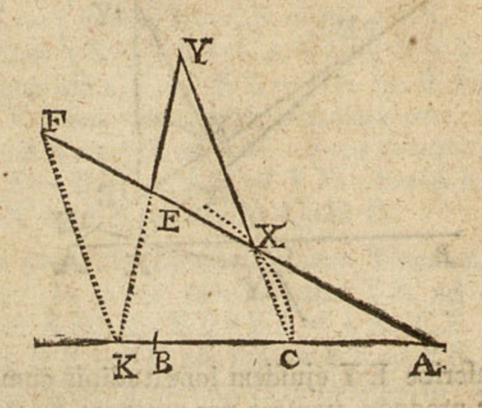


demonstrandæ, & ejus casibus secundum casus Problematis determinandis non immoror.

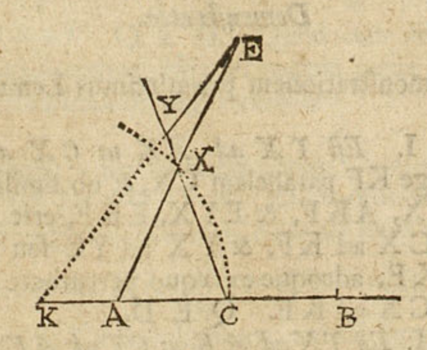
Hac, inquam, constructione solvi potest Problema sicui ita visum sit. Sed hæc solutio magis composita est quam ut usibus ullis inservire possit. Nuda speculatio est, & speculationes Geometricæ tantum habent elegantiæ quantum simplicitatis, tantumque laudis merentur quantum utilitatis secum afferunt. Ea de causa constructionem per Conchoidem præfero ut multo simpliciorem, & non minus Geometricam; & quæ resolutioni æquationum à nobis propositæ optime conducit. Præmisso igitur præcedente Lemmate construimus Geometrice Problemata cubica, & quadrato-quadratica [*utpote quæ ad cubica reduci possunt*] ut sequitur.

Pro-

Proponatur æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, *cujus terminus secundus deest, tertius vero sub signo suo designatur per* + q *&* *quartus per* + r.

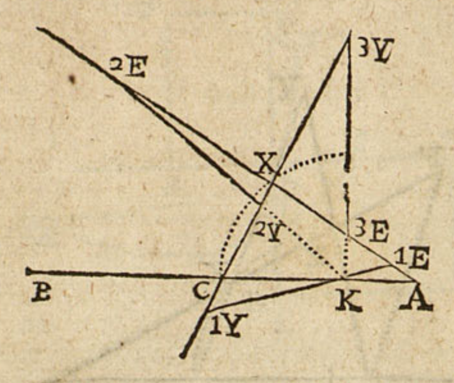


Duc quamlibet KA quam dic *n*. In KA utrinque producta cape KB $= \frac{q}{n}$ ad easdem partes cum



KA si habeatur + *q*, aliter ad contrarias. Biseca BA in C, & centro K radio KC fac circulum

C X, cui inſcribe rectam C X æqualem $\frac{r}{nn}$, & produc eam utrinque. Dein junge A X & produc eam utrinque. Denique inter has lineas C X &



A X inſcribe E Y ejuſdem longitudinis cum C A, quæque producta tranſeat per punctum K, & X Y erit radix æquationis. Et ex his radicibus affirmativæ erunt quæ cadunt ad partes X verſus C, & negativæ quæ cadunt ad partes contrarias, ſi habeatur $+ r$, & contra ſi habeatur $- r$.

Demonſtratio.

Ad demonſtrationem præmittimus Lemmata ſequentia.

LEM. I. *Eſt Y X ad A K ut C X ad K E.* Etenim age KF parallelam CX, & ob ſimilia triangula A C X, A K F, & E Y X, E K F, erit A C ad A K ut C X ad K F, & Y X ad Y E ſeu A C ut K F ad K E, adeoque ex æquo perturbate Y X ad A K ut C X ad K E. Q. E. D.

LEM. II. *Eſt Y X ad A K ut C Y ad A K + K E.* Nam componendo eſt Y X ad A K ut Y X + C X, id eſt C Y ad A K + K E. Q. E. D.

LEM.

LEM. III. *Est* $KE - BK$ *ad* YX *ut* YX *ad* AK.

Nam per 12. II. *Elem.* est $YKq - CKq = CYq - CY \times CX = CY \times YX$, hoc est si Theorema resolvatur in proportionem CY ad $YK - CK$ ut $YK + CK$ ad YX. Sed est $YK - CK = YK - YE + CA - CK = KE - BK$. Et $YK + CK = YK - YE + CA + CK = KE + AK$. Adeoque est CY ad $KE - BK$ ut $KE + AK$ ad YX. Sed per *Lemma secundum* erat CY ad $KE + AK$ ut YX ad AK. Ergo ex æquo est YX ad $KE - BK$ ut AK ad YX. Seu $KE - BK$ ad YX ut YX ad AK. Q. E. D.

His præmissis Demonstrabitur Theorema ut sequitur. In *primo Lemmate* erat YX ad AK ut CX ad KE, seu $KE \times YX = AK \times CX$. In *tertio* erat $KE - BK$ ad YX ut YX ad AK. Unde si prioris rationis termini ducantur in YX fiet $KE \times YX - BK \times YX$ ad YXq ut YX ad AK, id est $AK \times CX - BK \times YX$ ad YXq ut YX ad AK, & ductis extremis & mediis in se $AKq \times CX - AK \times BK \times YX = YX$ *cub.* Denique pro YX, AK, BK, & CX restitutis x, n, $\frac{q}{n}$, & $\frac{r}{nn}$ orietur $r - qx = x^3$. Q. E. D. Quod vero ad signorum variationes attinet, istis secundum casus Problematum determinandis non immoror.

Proponatur jam æquatio cujus tertius terminus deest $x^3 + pxx + r = 0$. Et ad ejus constructionem assumpto quolibet n, cape in recta aliqua longitudines duas $KA = \frac{r}{nn}$, & $KB = p$, idque ad easdem partes si r & p habeant eadem signa, aliter ad contrarias. Biseca BA in C, & centro K radio KC describe circulum cui inscribe CX æqualem n,

& produc eam utrinque. Item junge AK, & produc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inscribe EY ejusdem longitudinis cum CA, ita ut ea si producatur transeat per K, & KE erit radix æquationis. Radices autem affirmativæ sunt ubi punctum Y cadit à parte puncti X versus C, & negativæ ubi punctum Y cadit ad alteras partes puncti X si modo habeatur $+ r$, & contra si habeatur $- r$.

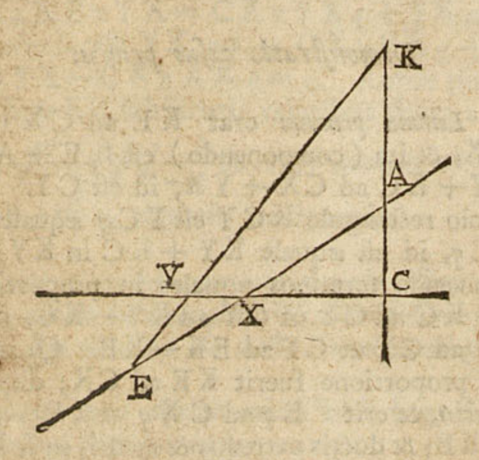
Ad hujus Propositionis demonstrationem Schemata & Lemmata de priori propositione mutuo sumantur, & *Demonstratio* erit ut sequitur.

Per *Lemma* 1, erat YX ad AK ut CX ad KE seu $YX \times KE = AK \times CX$, & per *Lemma* 3, $KE - KB$ ad YX ut YX ad AK, aut (sumpto KB ad contrarias partes) $KE + KB$ ad YX ut YX ad AK, adeoque $KE + KB$ in KE ad $YX \times KE$, seu $AK \times CX$ ut YX ad AK, seu CX ad KE. Quare ductis extremis & mediis in se, est KE *cub.* $+ KB \times KEq = AK \times CXq$, & ipsarum KE, KB, AK, & CX restitutis valoribus supra assignatis, $x^3 + pxx = r$.

Proponimus jam æquationem trium dimensionum $x^3 + pxx + qx + r = 0$, *nullo termino carentem, & cujus tres radices non sunt omnes affirmativæ neque omnes negativæ.*

Et primo si terminus q *negativus* est, in recta aliqua KB capiantur longitudines duæ $KA = \frac{r}{q}$ & $KB = p$, idque ad easdem partes puncti K si p & $\frac{r}{q}$ habent signa diversa; aliter ad contrarias. Biseca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale radici quadraticæ termini q: Et inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum inscribatur recta EY quæ æqualis

qualis ſit rectæ A C, & producta tranſeat per punctum K, atque K E erit radix æquationis, quæ



quidem affirmativa erit ſi punctum X cadat inter puncta A & E, negativa vero ſi punctum E cadat ad partes puncti X verſus A.

Quod ſi terminus q *affirmativus* eſt, in recta K B capiantur longitudines illæ duæ $KA = \sqrt{\frac{-r}{p}}$, & $KB = \frac{q}{KA}$, idque ad eaſdem partes puncti K, ſi $\sqrt{\frac{-r}{p}}$ & $\frac{q}{KA}$ habent ſigna diverſa; aliter ad contrarias: Biſeca A B in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum C X æquale termino p: & inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum inſcribatur recta E Y quæ æqualis ſit rectæ A C, & producta tranſeat per punctum K, atque X Y erit radix æquationis; quæ quidem negativa erit ſi punctum x cadat inter puncta A & E, affirma-

affirmativa vero si punctum Y cadat ad partes puncti X versus punctum C.

Demonstratio casus prioris:

Per *Lemma primum* erat KE ad CX ut AK ad YX, & ita (componendo) est KE + AK, id est KY + KC ad CX + YX, id est CY. Sed in triangulo rectangulo KCY est YC*q* æquale YK*q* — KC*q*, id est æquale KY + KC in KY — KC, & resolvendo terminos æquales in proportionales, KY + KC ad CY ut CY ad KY — KC, seu KE + AK ad CY ut CY ad EK — KB. Quare cum in hac proportione fuerit KE ad CX; duplicetur proportio, & erit KE*q* ad CX*q* ut KE + AK ad KE — KB; & ductis extremis & mediis in se KE *cub.* — KB × KE*q* = CX*q* × KE + CX*q* × AK. Et restitutis valoribus supra assignatis $x^3 - pxx = qx + r$.

Demonstratio casus secundi.

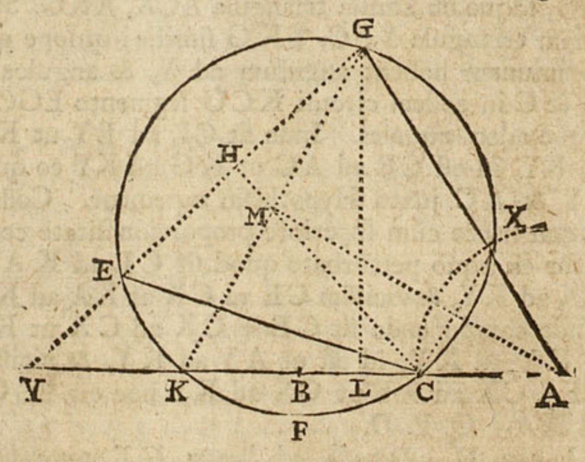
Per *Lemma primum* est KE ad CX ut AK ad YX, ductisque extremis & mediis in se fit KE × YX = CX × AK. Scribe ergo in superioribus KE × YX pro CX × AK, & fiet KE *cub.* — KB × KE*q* = CX*q* × KE + CX × KE × YX. Et applicatis omnibus ad KE erit KE*q* — KB × KE = CX*q* + CX × YX: ductisque omnibus in AK habebitur AK × KE*q* — AK × KB × KE = AK × CX*q* + AK × CX × YX: Ac rursus scripto KE × YX pro CX × AK, fiet AK × KE*q* — AK × KB × KE = KE × YX × CX + KE × YX*q*: & applicatis omnibus ad KE orietur AK × KE — AK × KB = YX × CX + YX*q*: ductisque omnibus in YX emerget AK × KE × YX — AK × KB × YX = YX*q*

$= YXq \times CX + YX\ cub.$ & pro $KE \times YX$ scriptis in primo termino $CX \times AK$, fiet $CX \times AKq - AK \times KB \times YX = CX \times YXq + YX\ cub.$ seu quod perinde est $YX\ cub. + CX \times YXq + AK \times KB \times YX - CX \times AKq = 0$. Atque pro YX, CX, AK & KB substitutis valoribus supra assignatis x, p, $\sqrt{\frac{-r}{p}}$, $q\sqrt{\frac{p}{-r}}$ emerget tandem $x^3 + pxx + qx + r = 0$, æquatio construenda.

Solvuntur etiam hæ æquationes ducendo rectam lineam datæ longitudinis inter circulum & aliam rectam positione datos, ea lege ut recta illa ducta convergat ad punctum datum.

Proponatur enim æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$; *cujus terminus secundus deest.*

Duc rectam KA ad arbitrium. Eam dic n. In KA utrinque producta cape $KB = \frac{q}{n}$, idq; ad easdem partes puncti K cum linea KA si modo habeatur $-q$, ali-



ter ad diversas. Biseca BA in C, & centro A intervallo AC describe circulum CX. Ad hunc apta lineam rectam

rectam $CX = \frac{r}{nn}$, & per puncta K, C, & X describe circulum KCXG. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum secet circulum ultimo descriptum KCXG in puncto G. Denique inter hunc ultimo descriptum circulum & rectam KC utrinque productam inscribe rectam EY ejusdem longitudinis cum recta AC, ita ut ea convergat ad punctum G. Et acta recta EC erit una ex radicibus æquationis. Radices autem affirmativæ sunt quæ cadunt in majori circuli segmento KGC, & negativæ quæ in minori KFC si habeatur $-r$; & contra si habeatur $+r$ affirmativæ in minori segmento KFC, negativæ in majori KGC reperientur.

Ad hujus vero constructionis demonstrationem præmittimus Lemmata sequentia.

LEM. I. *Positis quæ in constructione superiore, est CE ad KA ut CE + CX ad AY, & CX ad KA.*

Nam recta KG ducta, est AC ad AK ut CX ad KG, idque ob similia triangula ACX, AKG. Sunt etiam triangula YEC, YKG similia: quippe quæ communem habent angulum ad Y, & angulos ad G & C in eodem circuli KCG segmento EGCK, atque adeo æquales. Inde fit CE ad EY ut KG ad KY, id est CE ad AC ut KG ad KY eo quod EY & AC juxta Hypothesin æquantur. Collata autem hacce cum superiore proportionalitate colligitur ex æquo perturbate quod sit CE ad KA ut CX ad KY, & vicissim CE ad CX ut KA ad KY. Unde componendo fit CE + CX ad CX ut KA + KY ad KY, id est ut AY ad KY, & vicissim CE + CX ad AY ut CX ad KY hoc est ut CE ad KA. Q. E. D.

LEM. II. *Demisso ad lineam GY perpendiculo CH, fiet rectangulum 2HEY æquale rectangulo CE × CX.*

Nam

Nam demisso etiam ad lineam AY perpendiculo GL, triangula KGL, ECH rectos habentia angulos ad L & H, & angulos ad K & E in eodem circuli CGK segmento CKEG, adeoque æquales, æquiangula sunt & proinde similia. Est ergo KG ad KL ut EC ad EH. Porro, à puncto A ad lineam KG demisso perpendiculo AM, ob æquales AK, AG bisecabitur KG in M, & triangula KAM KGL ob angulum ad K communem, & angulos ad M & L rectos fient similia: & inde est AK ad KM ut KG ad KL. Sed ut est AK ad KM ita est 2AK ad 2KM seu KG, & ita (ob similia triangula AKG, ACX) est 2AC ad CX; & (ob æquales AC & EY) ita est 2EY ad CX. Ergo est 2EY ad CX ut KG ad KL. Sed erat KG ad KL ut EC ad EH, ergo est 2EY ad CX ut EC ad EH, atque adeo rectangulum 2HEY (ductis nimirum extremis & mediis in se) æquale est rectangulo EC×CX. Q. E. D.

Assumpsimus hic lineas AK, AG æquales esse. Nimirum rectangula CAK, XAG (per *Corol. Prop.* 36. *lib.* III. *Elem.*) æqualia sunt, atque adeo ut CA est ad XA ita AG est ad AK. Sed CA, XA æquales sunt per Hypothesin; ergo & AG, AK.

Lem. III. *Constructis omnibus ut supra, tres lineæ BY, CE, KA, sunt continue proportionales.*

Nam (per *Prop.* 12. *lib.* II. *Elem.*) est $CYq = EYq + CEq + 2EY \times EH$. Et ablato utrinque EYq fit $CYq - EYq = CEq + 2EY \times EH$. Sed $2EY \times EH$ (per *Lem.* 2.) æquale est rectangulo $CE \times CX$, & addito utrinque CEq fit $CEq + 2EY \times EH = CEq + CE \times CX$. Ergo $CYq - EYq$ æquale est $CEq + CE \times CX$, id est $CY + EY$ in $CY - EY$ æquale est $CEq + CE \times CX$. Et resolutis æqualibus rectangulis in latera proportionalia fit $CE + CX$ ad $CY + EY$ ut $CY - EY$ ad

ad CE. Sunt autem tres lineæ EY, CA, CB æquales, & inde $CY + EY = CY + CA = AY$, & $CY - EY = CY - CB = BY$. Scribantur itaque AY pro $CY + EY$, & BY pro $CY - EY$, & fiet $CE + CX$ ad AY ut BY ad CE. Sed (*per Lem.* 1.) est CE ad KA ut $CE + CX$ ad AY, ergo est CE ad KA ut BY ad CE, hoc est lineæ tres BY, CE, KA, sunt continue proportionales. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum constructio superioris Problematis sic *demonstratur*.

Per Lemma 1. est CE ad KA ut CX ad KY, adeoque $KA \times CX = KY \times CE$, & applicatis his æqualibus extremorum & mediorum rectangulis ad CE fit $\frac{KA \times CX}{CE} = KY$. His lateribus æqualibus adde BK & æqualia erunt $BK + \frac{KA \times CX}{CE}$ & BY. Unde per *Lemma tertium* est $BK + \frac{KA \times CX}{CE}$ ad CE ut CE ad KA, & inde, ductis extremis & mediis in se provenit CEq æquale $BK \times KA + \frac{KAq \times CX}{CE}$, & omnibus præterea ductis in CE fit CE *cub.* æquale $BK \times KA \times CE + KAq \times CX$. CE erat radix æquationis dicta x, KA erat n, KB $\frac{q}{n}$, & CX $\frac{r}{nn}$. His pro CE, KA, KB, & CX substitutis oritur $x^3 = qx + r$, seu $x^3 - qx - r = 0$, æquatio construenda; ubi q & r negativa prodeunt sumptis KA & KB ad easdem partes puncti K, & radice affirmativa in majori segmento CGK existente. Hic *unus casus* est Constructionis demonstrandæ. Ducatur KB ad partes contrarias, id est, mutetur

mutetur signum ejus seu signum ipsius $\frac{q}{n}$, vel quod perinde est, signum termini q, & habebitur constructio æquationis $x^3 + qx - r = 0$: *Qui casus est alter.* In his casibus CX, & radix affirmativa CE cadunt ad easdem partes lineæ AK. Cadant CX & radix negativa ad easdem mutato signo ipsius CX seu $\frac{r}{nn}$ vel (quod perinde est) signo ipsius r, & habebitur *casus tertius* $x^3 + qx + r = 0$, ubi radices omnes sunt negativæ. Et mutato rursus signo ipsius KB seu $\frac{q}{n}$ vel solius q, incidetur in *casum quartum* $x^3 - qx + r = 0$. Quorum omnium casuum constructiones percurrere licebit, & sigillatim demonstrare ad modum casus primi. Nos uno casu demonstrato cæteros leviter attingere satis esse putavimus. Hi verbis iisdem mutato solum linearum situ demonstrantur.

Construenda jam sit æquatio cubica $x^3 + pxx * + r = 0$, *cujus tertius terminus deest.*

In figura superiore assumpta longitudine quavis n, capias in recta quavis infinita AY, KA, & KB quarum KA valeat $\frac{r}{nn}$, & KB valeat p. Has cape ad easdem partis puncti K, si modo signa terminorum p & r sint eadem, secus ad contrarias. Biseca BA in C, & centro K intervallo KC describe circulum CXG. In eo aptes rectam CX, æqualem longitudini assumptæ n. Junge AX & produc junctam ad G ita ut fiat AG æqualis AK, & per puncta K, C, X, G, describe circulum. Denique inter hunc circulum & rectam KC utrinque productam inscribe rectam EY ejusdem longitudinis cum recta AC ea lege ut hæc inscripta recta transeat per punctum G si modo ipsa producatur: & acta

acta recta KY erit una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ cadunt ad partes puncti K versus punctum A si modo habeatur $+r$; sin habeatur $-r$, affirmativæ sunt quæ cadunt ad partes contrarias. Et si affirmativæ radices jacent ex una parte puncti A, negativæ sunt quæ jacent ex altera.

Demonstratur autem hæc constructio ope Lemmatum trium novissimorum in hunc modum.

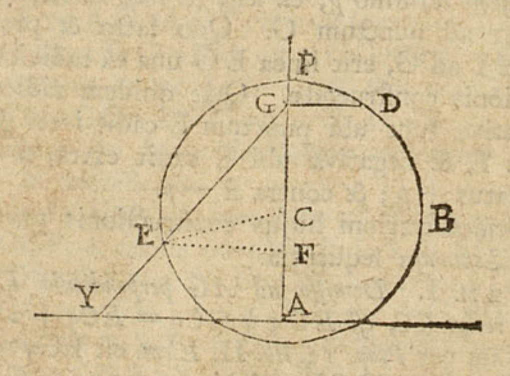
Per *Lemma tertium* sunt BY, CE, KA continue proportionales; & per *Lemma primum* ut est CE ad KA ita est CX ad KY. Ergo BY est ad CE ut CX ad KY. BY idem est quod KY — KB. Ergo KY — KB est ad CE ut CX ad KY. Sed ut est KY — KB ad CE ita est KY—KB in KY ad CE in KY, idque per *Prop.* 1. *lib.* VI. *Elem.* & ob proportionales CE ad KA ut CX ad KY est CE in KY æquale KA in CX. Ergo KY — KB in KY est ad KA in CX (ut KY — KB ad CE, hoc est) ut CX ad KY. Et ductis extremis & mediis in se invicem fit KY — KB in KY*q* æquale KA in CX*q*: id est KY *cub.* — KB × KY *quad.* æquale KA × CX *quad.* Erat autem in constructione, KY radix æquationis dicta x, KB æqualis p, KA æqualis $\frac{r}{nn}$, & CX æqualis n. Scribantur igitur x, p, $\frac{r}{nn}$, & n pro KY, KB, KA, & CX respective, & fiet $x^3 - pxx = r$, seu $x^3 - pxx - r = 0$.

Resolvi potest constructio demonstranda in hasce quatuor æquationum casus, $x^3 - pxx - r = 0$, $x^3 - pxx + r = 0$, $x^3 + pxx - r = 0$, & $x^3 + pxx + r = 0$. Casum primum jam demonstratum dedi, cæteri tres iisdem verbis mutato tantum linearum situ demonstrantur. Nimirum uti sumendo

do KA & KB ad easdem partes puncti K, & radicem affirmativam KY ad contrarias partes, jam prodiit KY *cub.* — KB × KY q = KA × CX q, & inde $x^3 - pxx - r = 0$: sic sumendo KB ad contrarias partes puncti K, prodibit simili argumentationis progressu KY *cub.* + KB × KYq = KA × CXq, & inde $x^3 + pxx - r = 0$. Et in hisce duobus casibus si mutetur situs radicis affirmativæ KY sumendo eam ad alteram partem puncti K, per similem argumentationis seriem devenietur ad alteros duos casus KY *cub.* + KB × KYq = — KA × CXq, seu $x^3 + pxx + r = 0$, & KY *cub.* — KB × KYq = — KA × CXq, seu $x^3 - pxx + r = 0$. Qui omnes casus erant demonstrandi.

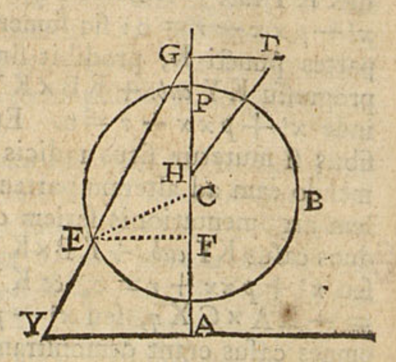
Proponatur jam æquatio cubica $x^3 + pxx + qx + r = 0$, *nullo (nisi forte tertio) termino carens.* Ea construetur ad hunc modum.

Cape ad arbitrium longitudinem n. Ejus dimidio æqualem duc rectam quamvis GC, & ad punctum G erige perpendiculum GD æquale $\sqrt{\frac{r}{p}}$.



Deinde si termini p & r habent contraria signa, centro C intervallo CD describe circulum PBE.

Sin eadem sunt eorum signa, centro D intervallo GC describe circulum occultum secantem rectam GA in H; dein centro C intervallo GH describe circulum PBE. Tum fac $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$, eamque duc in linea GC ad partes puncti G versus C si modo quantitas $-\frac{q}{n}$



$-\frac{r}{np}$ (signis terminorum p, q, r, in æquatione construenda probe observatis) affirmativa obvenerit: secus age GA ad alteras partes puncti G, & ad punctum A erecto perpendiculo AY, inter hoc & circulum PBE superius descriptum inscribe lineam EY æqualem termino p, ea lege ut hæc inscripta convergat ad punctum G. Quo facto & producta illa EY ad G, erit linea EG una ex radicibus æquationis construendæ. Quæ quidem radices affirmativæ sunt ubi punctum E cadit inter puncta G & Y, & negativæ ubi E cadit extra, si modo habeatur $+p$; & contra si $-p$.

Demonstrationi hujus constructionis præmittimus *Lemmata* sequentia.

LEM. I. *Demisso ad AG perpendiculo EF & acta recta EC, est* $EGq + GCq = ECq + 2\,CGF$.

Nam per *Prop.* 12. *lib.* II. *Elem.* est $EGq = ECq + GCq + 2\,GCF$. Addatur utrinque GCq & fiet $EGq + GCq = ECq + 2GCq + 2GCF$. Sed $2GCq + 2GCF$ est $2GC$ in $GC + CF$ id est $2CGF$. Ergo $EGq + GCq = ECq + 2CGF$. Q.E.D.

LEM.

LEM. II. *In constructionis casu primo ubi circulus PBE transit per punctum D, est $EGq - GDq = 2CGF$.*

Nam per *Lemma primum* est $EGq + GCq = ECq + 2CGF$, & ablato utrinque GCq, fit $EGq = ECq - GCq + 2CGF$. Sed $ECq - GCq$ idem est quod $CDq - GCq$, hoc est idem quod GDq. Ergo $EGq = GDq + 2CGF$; & subducto utrobique GDq, fit $EGq - GDq = 2CGF$. Q. E. D.

LEM. III. *In constructionis casu secundo, ubi circulus PBE non transit per punctum D, est $EGq + GDq = 2CGF$.*

Namque in *Lemmate primo* erat $EGq + GCq = ECq + 2CGF$. Aufer utrinque ECq & fiet $EGq + GCq - ECq = 2CGF$. Sed $GC = DH$ & $EC = CP = GH$: ergo $GCq - ECq = DHq - GHq = GDq$, atque adeò $EGq + GDq = 2CGF$. Q. E. D.

LEM. IV. *Est $2CGF$ in $GY = 2CG$ in AGE.*

Namque ob similia triangula GEF, GYA est GF ad GE ut AG ad GY; hoc est (per *Prop.* I. *lib.* VI. *Elem.*) ut $2CG \times AG$ ad $2CG \times GY$. Ducantur extrema & media in se, & fiet $2CG \times GY \times GF = 2CG \times AG \times GE$. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum constructio Problematis sic demonstratur.

In casu *primo* est (per *Lem.* 2.) $EGq - GDq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq \times GY - GDq \times GY = 2CGF \times GY$ (hoc est per *Lem.* 4.) $= 2CG \times AGE$. Pro GY scribe $EG + EY$, & fiet $EG\,cub. + EY \times EGq - GDq \times EG - GDq \times EY = 2CGA \times EG$, seu $EG\,cub. + EY \times EGq \begin{matrix} - GDq \\ - 2CGA \end{matrix} \times EG - GDq \times EY = 0$.

In casu *secundo* est (per *Lem.* 3.) $EGq + GDq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq \times GY + GDq \times GY = 2CGF \times GY$ (hoc est per *Lem.* 4.)

 $= 2CG$

$= 2CG \times AGE$. Pro GY ſcribe $EG + EY$, & fiet $EG\,cub. + EY \times EGq + GDq \times EG + GDq \times EY = 2CGA \times EG$, ſeu $EG\,cub. + EY \times EGq \begin{matrix} + GDq \\ - 2CGA \end{matrix} \times EG + GDq \times EY = 0$.

Jam vero erat EG radix æquationis conſtructæ dicta x; item $GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$, $EY = p$, $2CG = n$, & $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$, id eſt in caſu primo ubi terminorum p & r diverſa ſunt ſigna: at in caſu ſecundo ubi alterutrius p vel r mutatur ſignum fiet $-\frac{q}{n} + \frac{r}{np} = GA$. Scribantur igitur pro EG, GD, EY, 2CG, & GA quantitates x, $\sqrt{\frac{r}{p}}$, p, n, & $-\frac{q}{n} \mp \frac{r}{np}$, & caſu *primo* fiet $x^3 + px^2 \begin{matrix} -\frac{r}{p} \\ +q+\frac{r}{p} \end{matrix} x - r = 0$, id eſt $x^3 + pxx + qx - r = 0$, caſu autem *ſecundo* $x^3 + px^2 \begin{matrix} +\frac{r}{p} \\ +q-\frac{r}{p} \end{matrix} x + r = 0$, id eſt $x^3 + pxx + qx + r = 0$. Eſt igitur in utroque caſu EG vera longitudo radicis x. Q. E. D.

Subdiſtinguitur autem caſus uterque in caſus plures particulares. Nimirum prior in hoſce $x^3 + px^2 + qx - r = 0$, $x^3 + pxx - qx - r = 0$, $x^3 - pxx + qx + r = 0$, $x^3 - pxx - qx + r = 0$, $x^3 + px^2 - r = 0$, & $x^3 - pxx + r = 0$; poſterior in hoſce $x^3 + pxx + qx + r = 0$, $x^3 + pxx - qx + r = 0$, $x^3 - pxx + qx - r = 0$, $x^3 - pxx - qx - r = 0$, $x^3 + pxx + r = 0$, & $x^3 - pxx - r = 0$. Quorum omnium demonſtrationes verbis iiſdem ac duorum jam demonſtratorum, mutato tantum linearum ſitu, compinguntur.

Hæ

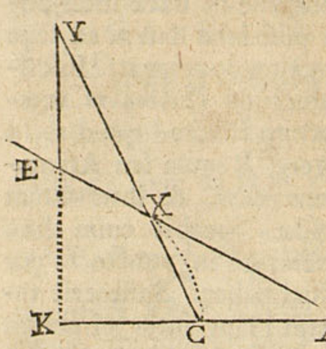
Hæ ſunt Problematum conſtructiones præcipuæ per inſcriptionem rectæ longitudine datæ inter circulum, & rectam lineam poſitione datam ea lege ut inſcripta ad datum punctum convergat. Inſcribitur autem talis recta ducendo *Conchoidem* veterum, cujus Polus ſit punctum illud ad quod recta inſcribenda debet convergere, Regula ſeu Aſymptotos recta altera poſitione data, & intervallum longitudo rectæ inſcribendæ. Secabit enim hæc Conchoides circulum præfatum in puncto E per quod recta inſcribenda duci debet. Suffecerit vero in rebus practicis rectam illam inter circulum & alteram poſitione datam rectam ratione quacunque mechanica interponere.

In hiſce autem conſtructionibus notandum eſt quod quantias n, ubique indeterminata & ad arbitrium aſſumenda relinquitur, id adeo ut ſingulis problematis conſtructiones commodius aptentur. Hujus rei exempla in inventione duarum medie proportionalium, & anguli triſectione dabimus.

Inveniendæ ſint inter a & b duæ medie proportionales x & y. Quoniam ſunt $a.x.y.b$ continue proportionales erit aa ad xx ut x ad b, adeoque $x^3 = aab$, ſeu $x^3 - aab = 0$. Hic deſunt æquationis termini p & q, & loco termini r habetur $-aab$. Igitur in conſtructionum formula prima, ubi recta EY ad datum punctum K convergens inſeritur inter alias duas poſitione datas rectas EX & YC, & recta CX ponitur æqualis $\frac{r}{nn}$ id eſt æqualis $\frac{-aab}{nn}$, aſſumo n æqualem a, & ſic fit CX æqualis $-b$. Unde talis emergit conſtructio.

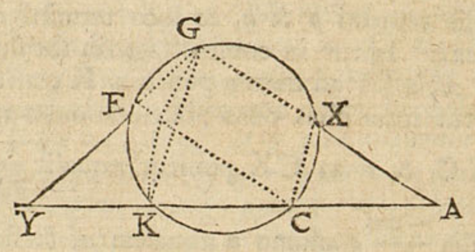
Duco quamvis KA æqualem a, eamque biſeco in C, centroque K intervallo KC deſcribo cir-

culum CX ad quem apto rectam CX æqualem b & inter rectas AX, CX infinite productas pono EY æqualem CA, & convergentem ad punctum K. Sic erunt KA, XY, KE, CX, continue proportionales, id est XY & KE duæ medie proportionales inter a & b. Constructio nota est.



In altera autem constructionum formula ubi recta EY ad datum punctum G convergens ponitur inter circulum GECX & rectam AK, estque $CX = \frac{r}{nn}$ id est (in hoc Problemate) $= \frac{-aab}{nn}$, pono ut prius $n = a$, & sic fit $CX = b$, cæteraque peraguntur ut sequitur.

Duco rectam quamvis KA æqualem a, eamque bisceco in C & centro A intervallo AK describo



circulum KG ad quem apto rectam KG æqualem $2b$ constituendo triangulum æquicrurum AKG. Dein per puncta C, K, G circulum describo & inter hujus perimetrum & rectam productam AK inscribo rectam EY æqualem KC, & convergentem ad

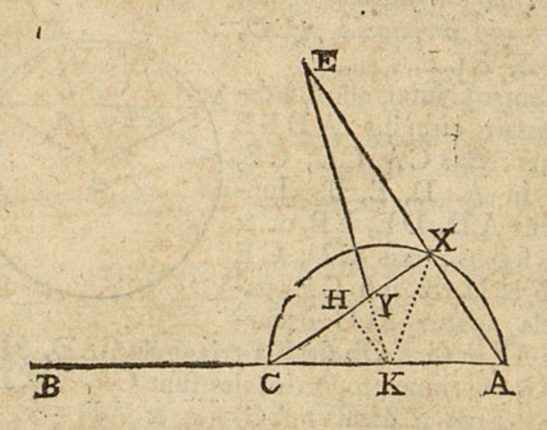
ad punctum G. Quo facto continue proportionales erunt AK, EC, KY, $\frac{1}{2}$KG, id eſt EC & KY duæ mediæ proportionales erunt inter datas a & b.

Secandus jam ſit angulus in partes tres æquales: Sitque angulus ſecandus ACB, partes ejus inveniendæ ACD, DCE, ECB.

Centro C intervallo CA deſcribatur circulus ADEB ſecans rectas CA, CD, CE, CB in A, D, E, B. Jungantur AD, DE, EB ut & AB ſecans rectas CD, CE in F & H, & ipſi CE parallela agatur DG occurrens AB in G. Ob ſimilia triangula CAD, ADF, DFG, continue proportionales ſunt CA, AD, DF, FG. Ergo ſi dicatur $AC = a$, & $AD = x$, fiet $DF = \frac{xx}{a}$, & $FG = \frac{x^3}{aa}$. Eſt autem $AB = BH + HG + FA - GF = 3AD - GF = 3x - \frac{x^3}{aa}$. Dic $AB = b$, & fiet $b = 3x - \frac{x^3}{aa}$, ſeu $x^3 - 3aax + aab = 0$. Hic deeſt æquationis terminus ſecundus p, & loco q & r habentur $-3aa$ & aab. Ergo in conſtructionum formula prima ubi erat $p = 0$, $KA = n$, $KB = \frac{q}{n}$, & $CX = \frac{r}{nn}$, id eſt in problemate jam conſtruendo $KB = -\frac{3aa}{n}$, & $CX = \frac{aab}{nn}$, ut hæ quantitates evadant quam ſimpliciſſimæ pono $n = a$, & ſic fit $KB = -3a$, & $CX = b$.

$= b$. Unde talis emergit Problematis *constru-ctio.*

Ago quamvis K A $= a$, & ad contrarias partes K B $= 3a$. Biseco B A in C, centroque K intervallo K C describo circulum, cui inscribo rectam

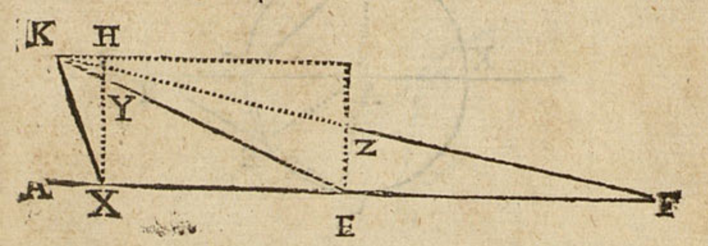


C X $= b$. Et acta recta A X, inter ipsam infinite productam & rectam C X pono rectam E Y æqualem AC, & convergentem ad punctum K. Sic fit X Y $= x$. Quinetiam ob æquales circulos ADEB, CXA, & æquales subtensas AB, CX, nec non æquales subtensarum partes BH, XY, æquales erunt anguli ACB, CKX, ut & anguli BCH, XKY, atque adeo anguli C K X tertia pars erit angulus XKY. Dati igitur cujusvis anguli CKX pars tertia XKY invenietur ponendo inter chordas CX, A X infinite productas rectam E Y æqualem diametro A C, & convergentem ad circuli centrum K.

Hinc si à circuli centro K ad subtensam C X demittas perpendiculum K H, erit angulus H K Y tertia pars anguli HKX, adeo ut si detur quilibet angulus HKX inveniri possit ejus pars tertia HKY demittendo à quolibet lateris utriusvis K X pun-

cto

cto X ad latus alterum KH perpendiculum XH, & lateri KH ducendo parallelam XE, dein rectam YE duplam ipsius KX, & convergentem ad punctum K ponendo inter rectas XH & XE. *Vel sic.* Detur angulus quilibet AXK. Ad latus alterutrum

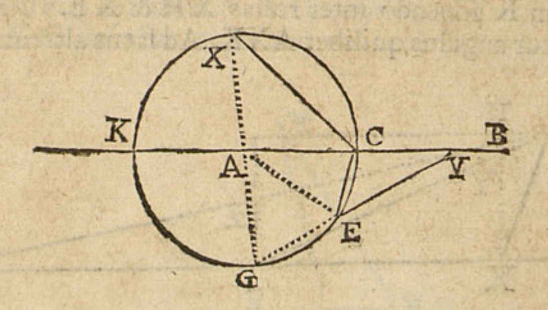


AX erigatur perpendiculum XH, & à lateris alterius XK puncto quovis K agatur recta KE cujus pars YE interjacens lateri AX producto, & ejus perpendiculo XH sit dupla lateris XK, & erit angulus KEA tertia pars anguli dati AXK. Tum rursus erecto perpendiculo EZ, & acta KF cujus pars ZF inter EF & EZ sit dupla ipsius KE, fiet angulus KFA tertia pars anguli KEA, & sic pergitur per continuam anguli trisectionem in infinitum. Exstat autem hæc trisectio apud *Pappum, lib.* 4 *Prop.* 32.

Quod si angulum per alteram constructionum formulam ubi recta inter aliam rectam & circulum ponenda est, trifariam dividere malueris: Hic etiam erunt $KB = \frac{q}{n}$, & $CX = \frac{r}{nn}$, id est in problemate de quo nunc agimus $KB = \frac{-3aa}{n}$, & $CX = \frac{aab}{nn}$, adeoque ponendo $n = a$ fiet $KB = -3a$, & $CX = b$. Et inde talis emerget *constructio.*

A puncto quovis K ducantur ad easdem partes rectæ duæ $KA = a$, & $KB = 3a$. Biseca AB in C, cen-

C, centroque A intervallo AC describe circulum. In eo pone rectam CX = b. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum secet circulum jam



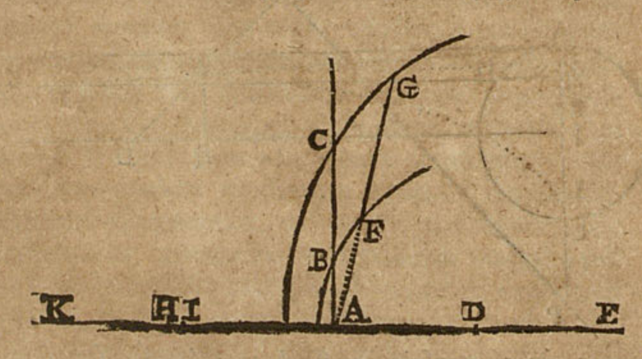
descriptum in G. Tum inter hunc circulum & rectam KC infinite productam pone rectam EY æqualem rectæ AC, & convergentem ad punctum G, & acta recta EC erit longitudo quæsita x, qua tertia pars anguli dati subtenditur.

Talis constructio consequitur formulam superius allatam: quæ tamen sic evadet concinnior. Ob æquales circulos ADEB & KXG, & æquales subtensas CX & AB, æquales sunt anguli CAX sive KAG & ACB, adeoque CE subtensa est tertiæ partis anguli KAG. Quare dato quovis angulo KAG, ut ejus inveniatur pars tertia CAE, pone inter circulum KGC, & anguli latus KA infinite productum rectam EY æqualem circuli semidiametro AG, & convergentem ad punctum G. Sic docuit *Archimedes* angulum trifariam secare. Eædem constructiones facilius explicari possint quam hic factum est; sed in his volui ostendere quomodo ex generalibus Problematum constructionibus superius expositis constructiones simplicissimas particularium Problematum derivare liceat.

Lemma Archim 8.

Præter

Præter constructiones hic expositas adjungere liceret quamplurimas. *Ut si inter a & b invenienda essent duæ mediæ proportionales.* Age quamvis

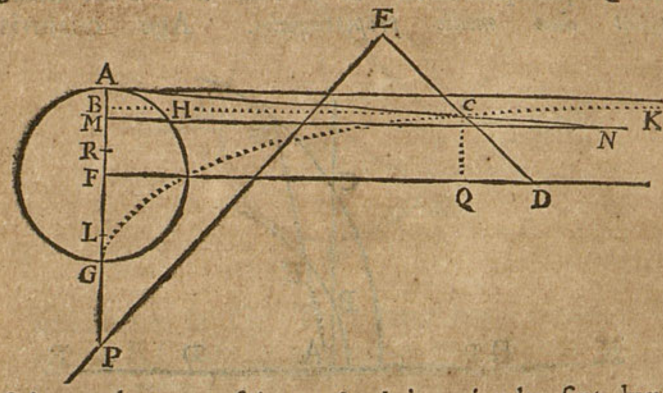


A K = *b*, & huic perpendiculare A B = *a*. Bisecæ A K in I, & in eadem A K, subtensæ B I æqualem pone A H; ut & in linea A B producta subtensæ B H æqualem A C. Tum in linea A K ad alteras partes puncti A cape A D cujusvis longitudinis & huic æqualem D E, centrisque D & E, intervallis D B, E C describe circulos duos B F, C G, & inter eos pone rectam F G æqualem rectæ A I, & convergentem ad punctum A, & erit A F, prima duarum mediæ proportionalium quas invenire oportuit.

Docuerunt Veteres inventionem duarum mediæ proportionalium per *Cissoidem*; sed lineæ hujus descriptionem commodam manualem nemo, quod scio, apposuit. Sit A G diameter & F centrum circuli ad quem *Cissois* pertinet. Ad punctum F erigatur normalis F D, eaque producatur in infinitum. Et producatur F G ad P, ut FP æqualis sit circuli Diametro. Moveatur norma rectangula P E D ea lege ut crus ejus E P perpetuo transeat per punctum P, & crus alterum E D circuli Diametro A G seu F P æquale, termino suo D tangat semper lineam F D,

&

& cruris hujus medium punctum C describet *Cissoidem* desideratam G C K ut supra exposui. Quare



si inter duas quasvis a & b inveniendæ sint duæ mediæ proportionales: Cape A M $= a$, erige perpendiculum M N $= b$. Junge A N; & lege præfata moveatur norma P E D, usque dum punctum ejus C incidat in rectam A N. Tum demisso ad A P perpendiculo C B, cape t ad B H, & u ad B G, ut est M N ad B C, & ab continue proportionales A B, B H, B G, B C erunt etiam continue ptoportionales a, t, v, b.

Simili normæ applicatione construi possunt etiam alia Problemata solida. Verbi gratia proponatur æquatio cubica $x^3 \pm p\,x\,x + q\,x - r = 0$: ubi q semper affirmativum sit, r negativum, & p signi utriusvis. Fac A G $= \frac{r}{q}$, eamque biseca in F, & cape F R & G L $= \frac{1}{2}p$, idque versus A si habeatur $+p$ aliter versus P. Erige insuper normalem F D, inque ea cape F Q $= \sqrt{q}$ huic etiam erige normalem Q C. In normæ autem crure E D, cape E D & E C ipsis A G & A R æquales respective, & applicetur deinceps norma ad Schema sic ut punctum ejus D tangat rectam F D, & punctum C rectam Q C, tum si compleatur parallelogrammum B Q; erit L B æquationis radix quæsita x. Hactenus

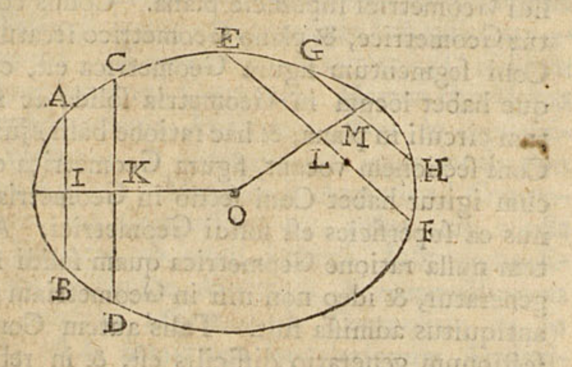
Hactenus constructionem solidorum Problematum per operationes quarum praxis manualis maxime simplex est & expedita exponere visum fuit. Sic Veteres postquam confectionem horum problematum per compositionem locorum solidorum assecuti fuerant, sentientes ejusmodi constructiones ob difficilem Conicarum sectionum descriptionem inutiles esse, quærebant constructiones faciliores per Conchoidem, Cissoidem, extensionem filorum & figurarum adaptiones quascunque mechanicas: prælata mechanica utilitate inutili speculationi Geometricæ, ut ex *Pappo* discimus, Sic magnus ille *Archimedes* trisectionem anguli per coni sectiones à superioribus Geometris expositam neglexit, & in Lemmatis suis angulum modo à nobis superius exposito trifariam secare docuit. Si veteres problemata per figuras ea tempestate in Geometriam non receptas construere maluerint, quanto magis præferendæ nunc sunt illæ figuræ, in Geometriam æque ac ipsæ coni sectiones à plerisque receptæ.

Verum tamen novo huic Geometrarum generi haud assentior, qui figuras hasce omnes in Geometriam recipiunt, Eorum regula admittendi lineas omnes ad constructionem Problematum eo ordine quo æquationes quibus lineæ illæ definiuntur, numero dimensionum ascendunt, arbitraria est, & in Geometria fundamentum non habet. Imo falsa est, propterea quod circulus hac lege cum Coni sectionibus conjungendus esset quem tamen Geometræ omnes cum linea recta conjungunt. Vacillante autem hac regula tollitur fundamentum admittendi certo ordine lineas omnes Analyticas in Geometriam. In Geometriam planam meo quidem judicio lineæ nullæ præter rectam & circulum admitti debent, nisi forte linearum

rum diſtinctio aliqua prius excogitetur qua linea circularis conjungatur cum recta, & à reliquis omnibus ſegregetur. Quinimo ne tum quidem augenda eſt Geometria plana numero linearum, Nam figuræ omnes ſunt planæ quæ admittuntur in Geometriam planam, id eſt quas Geometræ poſtulent in plano deſcribere, Et problema omne planum eſt quod per figuras planas conſtrui poteſt. Sic igitur admiſſis in Geometriam planam conicis ſectionibus, aliiſque magis compoſitis figuris, problemata omnia ſolida & plus quam ſolida quæ per has figuras conſtrui poſſunt evadent plana. Sunt autem problemata omnia plana ejuſdem ordinis. Linea recta Analytice ſimplicior eſt quam circulus; hoc non obſtante problemata ejuſdem ſunt ordinis quæ per rectas ſolas, & quæ per circulos conſtruuntur. Solis poſtulatis reducitur circulus ad eundem ordinem cum recta. Et multo magis Ellipſis quæ minus differt à circulo quam circulus à recta, poſtulando conſimiliter deſcriptionem ejus in plano, reduceretur ad eundem ordinem cum circulo. Siquis ſpeculando Ellipſin incideret in problema aliquod ſolidum, et ipſum beneficio ejuſdem Ellipſeos & circuli conſtrueret: hoc problema jam pro plano habendum eſſet, eo, quod Ellipſis jam ante in plano deſcripta haberi ſupponitur, & conſtructio omnis quæ ſupereſt abſolvitur per circuli ſolius deſcriptionem. Eadem de cauſa problemata quævis plana per datam Ellipſin conſtruere licitum eſt. Verbi gratia ſi datæ Ellipſeos ADFG requireretur centrum O, ducerem parallelas duas AB, CD Ellipſi occurrentes in A, B, C, D, aliaſque duas EF, GH Ellipſi occurrentes in E, F, G, H. Has biſecarem in I, K, L, M, & junctas IK, LM producerem uſque ad concurſum ſuum in O. Legitima eſt hæc conſtructio plani

pro-

problematis per Ellipsin. Nil refert quod Ellipsis Analytice definiatur per æquationem duarum dimensionum. Nil quod Ellipsis Geometrice gene-



retur sectione figuræ solidæ. Hypothesis sola, quod Ellipsis jam descripta habetur in plano, problemata omnia solida per ipsam constructa reducit ad ordinem planorum, efficitque ut plana omnia per ipsam legitime construantur. Et eadem est ratio Postulati. Quod vi postulatorum fieri potest, ut jam factum, & datum assumere concessum est. Postuletur igitur Ellipsin in plano describere, & ad ordinem planorum problematum reducentur ea omnia quæ per Ellipsin construi possunt, planaque omnia per Ellipsin licebit construere.

Necesse est igitur aut Problemata plana & solida inter se confundi, aut lineas omnes rejici è Geometria plana præter rectam & circulum, & siqua forsan alia detur aliquando in statu construendi alicujus Problematis. Verum genera problematum confundi nemo certe permiserit. Rejiciantur igitur è Geometria plana sectiones Conicæ, aliæque figuræ omnes præter rectam & circulum, & quas contigerit in statu problematum dari. Alienæ sunt igitur à Geometria descriptiones illæ omnes conicarum sectionum in plano quibus hodierni Geometræ tantopere

topere indulgent. Nec tamen ideo Coni sectiones è Geometria rejiciendæ erunt. Hæ in plano non describuntur Geometrice, generantur vero in solidi Geometrici superficie plana. Conus constituitur Geometrice, & plano Geometrico secatur. Tale Coni segmentum figura Geometrica est, eundemque habet locum in Geometria solida ac segmentum circuli in plana, & hac ratione basis ejus, quam Coni sectionem vocant, figura Geometrica est. Locum igitur habet Coni sectio in Geometria quatenus ea superficies est solidi Geometrici. Alia autem nulla ratione Geometrica quam solidi sectione generatur, & ideo non nisi in Geometriam solidam antiquitus admissa fuit. Talis autem Conicarum sectionum generatio difficilis est, & in rebus practicis, quibus Geometria potissimum inservire debet, prorsus inutilis. Ideo veteres se ad varias figurarum in plano descriptiones mechanicas receperunt, & nos ad eorum exemplar constructiones præcedentes concinnavimus. Sunto constructiones illæ Mechanicæ: sic & constructiones per Coni sectiones in plano (ut jam moris est) descriptas Mechanicæ sunt. Sunto constructiones per datas Coni sectiones Geometricæ: sic & constructiones per alias quascunque figuras datas Geometricæ sunt, & ejusdem ordinis cum constructionibus planorum Problematum. Nulla ratione præferendæ sunt in Geometria Sectiones conicæ figuris aliis, nisi quatenus illæ à sectione Coni, praxi ad solutionem problematum prorsus inutili, derivantur. Verum tamen ne constructiones per Conicas sectiones omnino prætercam, visum fuit aliqua de his subjungere, in quibus etiam praxi manuali non incommodæ consulatur.

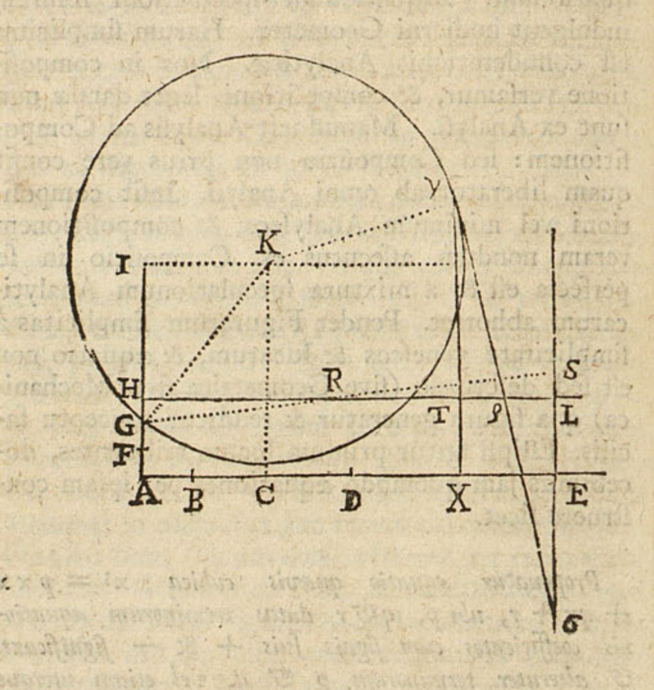
Conicarum sectionum simplicissima est Ellipsis. Hæc notior est, & circulo magis affinis, & praxi manuali

manuali facilius describitur in plano. Parabolam præferunt plerique ob simplicitatem æquationis per quam ea exprimitur. Verum hac ratione Parabola ipso etiam circulo præferenda esset, contra quam fit. Falsa est igitur argumentatio à simplicitate æquationum. Æquationum speculationi nimium indulgent hodierni Geometræ. Harum simplicitas est considerationis Analyticæ. Nos in compositione versamur, & compositioni leges dandæ non sunt ex Analysi. Manuducit Analysis ad Compositionem: sed Compositio non prius vere confit quam liberatur ab omni Analysi. Insit compositioni vel minimum Analyseos, & compositionem veram nondum assecutus es. Compositio in se perfecta est & à mixtura speculationum Analyticarum abhorret. Pendet Figurarum simplicitas à simplicitate geneseos & Idearum, & æquatio non est sed descriptio (sive Geometrica sive Mechanica) qua figura generatur & redditur conceptu facilis. Ellipsi igitur primum locum tribuentes, docebimus jam quomodo æquationes per ipsam construere licet.

Proponatur æquatio quævis cubica $x^3 = pxx + qx + r$, *ubi* p, q *&* r *datas terminorum æquationis coefficientes cum signis suis* + & — *significant, & alteruter terminorum* p *&* q, *vel etiam uterque deesse potest.* Sic enim æquationum omnium cubicarum constructiones una illa operatione quæ sequitur exhibebimus.

A puncto B in recta quavis data cape duas quascunque rectas BC, BE ad easdem partes; ut & inter ipsas mediam proportionalem BD. Et BC dicta n, cape etiam in eadem recta BA $= \frac{q}{n}$, idque versus punctum C si habeatur $-q$, aliter ad partes

contrarias. Ad punctum A erige perpendiculum AI, inque eo cape AF æqualem p, FG æqualem AF, FI æqualem $\frac{r}{nn}$, & FH in ratione ad FI ut est BC ad BE. FH vero & FI capiendæ sunt ad



partes puncti F versus G si termini p & r habent eadem signa, aliter ad partes versus A. Compleantur parallelogramma IACK & HAEL, centroque K, & intervallo KG describatur circulus. Tum in linea HL capiatur ad utramvis partem puncti H longitudo HR, quæ sit ad HL ut BD ad BE: Agatur GR secans EL in S, & moveatur linea GRS puncto ejus R super linea HL, & puncto S super linea EL incedente, donec tertium ejus punctum G describendo Ellipsin, occurrat circulo

circulo, quemadmodum videre est in positione $\gamma\varrho\sigma$. Nam dimidium perpendiculi γX ab occursus illius puncto γ in rectam A E demissi erit radix æquationis. Potest autem Regulæ GRS vel $\gamma\varrho\sigma$ terminus G vel γ, circulo in tot punctis occurrere quot sunt possibiles radices Et è radicibus hæ sunt affirmativæ quæ cadunt ad eas partes rectæ A E ad quas recta F I ducitur à puncto F, & illæ negativæ quæ cadunt ad contrarias partes lineæ A E, si modo habeatur $+r$: & contra si habeatur $-r$.

Demonstratur autem hæc constructio subsidio *Lemmatum* sequentium.

LEM. I. *Positis quæ in superiore constructione, est* $2CAX - AXq = \gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$.

Namque ex natura circuli est $K\gamma q - CXq$, æquale quadrato ex $\gamma X - AI$. Sed est $K\gamma q$ æquale $GIq + ACq$, & CXq æquale quadrato ex $AX - AC$ hoc est æquale $AXq - 2CAX + ACq$, atque adeo horum differentia $GIq + 2CAX - AXq$, æquatur quadrato ex $\gamma X - AI$, id est ipsi $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq$. Auferatur utrinque GIq, & manebunt æqualia $2CAX - AXq$, & $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq - GIq$. Verum AIq (per *Prop.* 4. *lib.* II. *Elem.*) æquale est $AGq + 2AGI + GIq$, atque adeo $AIq - GIq$ æquale est $AGq + 2AGI$, hoc est æquale $2AG$ in $\frac{1}{2}AG + GI$, seu æquale $2AG \times FI$, & proinde $2CAX - AXq$, æquale est $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$. Q. E. D.

LEM. II. *Positis quæ in superiore constructione, est* $2EAX - AXq$ *æquale* $\frac{FI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AG \times FI$.

Notum est enim quod punctum γ motu regulæ $\gamma\varrho\sigma$ superius assignato describit Ellipsin cujus centrum est L, & axes duo cum rectis LE & LH coincidunt, quorum qui in LE æquatur $2\gamma\varrho$ sive 2 GR, & alter in LH æquatur $2\gamma\sigma$ sive 2GS. Et horum ratio ad invicem ea est quæ lineæ HR ad lineam HL, sive lineæ BD ad lineam BE. Unde latus transversum est ad latus rectum principale ut BE ad BC sive ut FI ad FH. Quare cum γT ordinatim applicetur ad HL, erit ex natura Ellipseos $GSq - LTq$ æquale $\frac{FI}{FH} T\gamma q$. Est autem LT æquale AE — AX, & Tγ æquale Xγ — AH. Scribantur horum quadrata pro LTq & $T\gamma q$, & fiet $GSq - AEq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$. Est autem $GSq - AEq$ æquale quadrato ex GH + LS, propterea quod GS hypotenusa est trianguli rectanguli cujus latera sunt ipsis AE & GH + LS æqualia. Est & (ob similia triangula RGH, RSL) LS ad GH ut LR ad HR, & componendo GH + LS ad GH ut HL ad HR, & duplicando rationes, quadratum ex GH + LS, est ad GHq ut HLq ad HRq, hoc est (per constructionem) ut BEq ad BDq, id est ut BE ad BC, seu FI ad FH, adeoque quadratum ex GH + LS æquale est $\frac{FI}{FH} GHq$. Est itaque $GSq - AEq$ æquale $\frac{FI}{FH} GHq$, atque adeo $\frac{FI}{FH} GHq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$. Auferatur utrinque $\frac{FI}{FH} GHq$, & restabit $2EAX$

$-AXq$

$-AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq - GHq$.
Est autem $AH = AG + GH$, adeoque $AHq = AGq + 2AGH + GHq$ & subducto utrinque GHq restat $AHq - GHq = AGq + 2AGH$, hoc est $= 2AG$ in $\frac{1}{2}AG + GH$, seu $= 2AG \times FH$, atque adeo est $2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + 2AG \times FH$, i.e. $= \frac{FI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AG \times FI$. Q.E.D.

LEM. III. *Iisdem positis est AX ad $X\gamma - AG$ ut $X\gamma$ ad 2 BC.*

Nam si de æqualibus in *Lemmate secundo* subducantur æqualia in *Lemmate primo*, restabunt æqualia $2CE \times AX$ & $\frac{HI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AI \times X\gamma$. Ducatur pars utraque in FH, & fiet $2FH \times CE \times AX$ æquale $HI \times X\gamma q - 2FI \times AH \times X\gamma + 2AI \times FH \times X\gamma$. Est autem $AI = AH + HI$, adeoque $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2FI \times AH - 2FHA - 2FHI$. Sed $2FI \times AH - 2FHA = 2AHI$, & $2AHI - 2FHI = 2HI \times AF$. Ergo $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2HI \times AF$, adeoque $2FH \times CE \times AX = HI \times X\gamma q - 2HI \times AF \times X\gamma$. Et inde HI ad FH ut $2CE \times AX$ ad $X\gamma q - 2AF \times X\gamma$. Sed per constructionem HI est ad FH ut CE ad BC, atque adeo ut $2CE \times AX$ ad $2BC \times AX$, & proinde $2BC \times AX$ & $X\gamma q - 2AF \times X\gamma$ (per *Prop. 9. lib.* V. *Elem.*) erunt æqualia. Æqualium vero rectangulorum proportionalia sunt latera, AX ad $X\gamma - 2AF$, id est ad $X\gamma - AG$ ut $X\gamma$ ad 2 BC. Q.E.D.

LEM.

LEM. IV. *Iisdem positis, est* $2FI$ *ad* $AX - 2AB$ *ut* $X\gamma$ *ad* $2BC$.

Nam de æqualibus in Lemmate tertio, nimirum $2BC \times AX = X\gamma q - 2AF \times X\gamma$, subducantur æqualia in *Lemmate primo*, & restabunt æqualia $-2AB \times AX + AXq = 2FI \times X\gamma - 2AG \times FI$, hoc est AX in $AX - 2AB = 2FI$ in $X\gamma - AG$. Æqualium vero rectangulorum proportionalia sunt latera $2FI$ ad $AX - 2AB$ ut AX ad $X\gamma - AG$, hoc est (per *Lemma tertium*) ut $X\gamma$ ad $2BC$. Q.E.D.

Præstratis his Lemmatibus, Constructio Problematis sic tandem demonstratur.

Per *Lemma quartum* est $X\gamma$ ad $2BC$ ut $2FI$ ad $AX - 2AB$, hoc est (per *Prop: 1. lib.* VI. *Elem.*) ut $2BC \times 2FI$ ad $2BC \times \overline{AX - 2AB}$, seu ad $2BC \times AX - 2BC \times 2AB$. Sed per *Lemma tertium* est AX ad $X\gamma - 2AF$ ut $X\gamma$ ad $2BC$, seu $2BC \times AX = X\gamma q - 2AF \times X\gamma$, adeoque $X\gamma$ est ad $2BC$ ut $2BC \times 2FI$ ad $X\gamma q - 2AF \times X\gamma - 2BC \times 2AB$. Et ductis extremis & mediis in se, fit $X\gamma\, cub. - 2AF \times X\gamma q - 4BC \times AB \times X\gamma = 8BCq \times FI$. Addantur utrinque $2AF \times X\gamma q + 4BC \times AB \times X\gamma$, & fiet $X\gamma\, cub. = 2AF \times X\gamma q + 4BC \times AB \times X\gamma + 8BCq \times FI$. Erat autem in constructione demonstranda, $\frac{1}{2}X\gamma$ radix æquationis dicta x, nec non $AF = p$, $BC = n$, $AB = \frac{q}{n}$, & $FI = \frac{r}{nn}$, adeoque $BC \times AB = q$. Et $BCq \times FI = r$. Quibus substitutis fiet $x^3 = px^2 + qx + r$. Q. E. D

Corol.

Corol. Hinc si AF & AB ponantur nulla, per *Lemma* tertium & quartum fiet 2 FI ad AX ut AX ad Xy & Xy ad 2 BC. Unde constat inventio duarum medie proportionalium inter datas quaslibet FI & BC.

Scholium. Hactenus æquationis cubicæ constructionem per Ellipsin solummodo exposui: sed regula sua natura generalior est, sese ad omnes coni sectiones indifferenter extendens. Nam si loco Ellipseos velis Hyperbolam adhiberi, cape lineas BC, BE ad contrarias partes puncti B, dein puncta A, F, G, I, H, K, L & R determinentur ut ante, excepto tantum quod FH debet sumi ad partes ipsius F contra I, & quod HR non in linea HL, sed in linea AI ad utramque partem puncti H capi debet, & vice rectæ GRS duæ aliæ rectæ à puncto L ad puncta duo R & R hinc inde duci pro asymptotis Hyperbolæ. Cum istis itaque asymptotis LR, LR describe Hyperbolam per punctum G, ut & circulum centro K intervallo KG: & dimidia perpendiculorum ab eorum intersectionibus ad rectam AE demissorum erunt radices æquationis propositæ. Quæ omnia, signis + & — probe mutatis, demonstrantur ut prius.

Quod si Parabolam velis adhiberi, abibit punctum E in infinitum, atque adeo nullibi capiendum erit, & punctum H cum puncto F coincidet eritque Parabola circa axem HL cum latere recto principali BC per puncta G & A describenda, sito vertice ad partes puncti F ad quas punctum B situm est respectu puncti C.

Sic sunt constructiones per Parabolam, si simplicitatem analyticam spectes, simplicissimæ omnium. Eæ per Hyperbolam proximum locum obtinent, & ultimum locum tenent quæ per Ellipsin

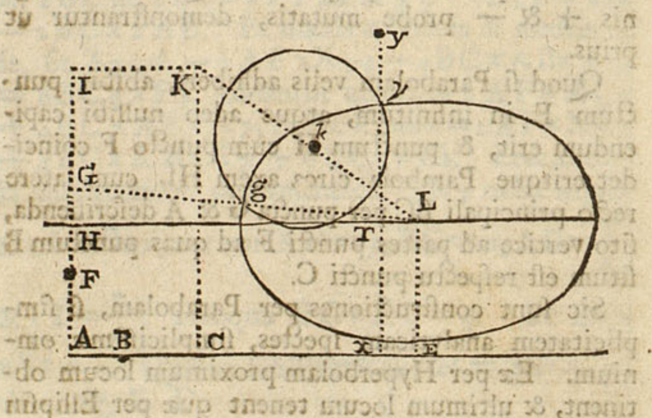
absol-

abſolvuntur. Quod ſi praxeos manualis in deſcribendis figuris ſpectetur ſimplicitas, mutandus eſt ordo.

In hiſce autem conſtructionibus obſervandum venit quod proportione lateris recti principalis ad latus tranſverſum determinatur ſpecies Ellipſeos & Hyperbolæ, & proportio illa eadem eſt quæ linearum BC & BE, atque adeo aſſumi poteſt: Parabolæ vero ſpecies eſt unica quam artifex ponendo BE infinite longam aſſequitur. Sic igitur penes artificem eſt æquationem quamcunque cubicam per conicam ſectionem imperatæ ſpeciei conſtruere. A figuris autem ſpecie datis ad figuras magnitudine datas devenietur augendo vel diminuendo in ratione data lineas omnes quibus figuræ ſpecie dabantur, atque ita æquationes omnes cubicas per datam quamvis Conicam ſectionem conſtruere licebit. Id quod ſic plenius explico.

Proponatur æquationem quamcunque cubicam $x^3 = pxx . qx . r$, *ope datæ cujuſcunque ſectionis conicæ conſtruere.*

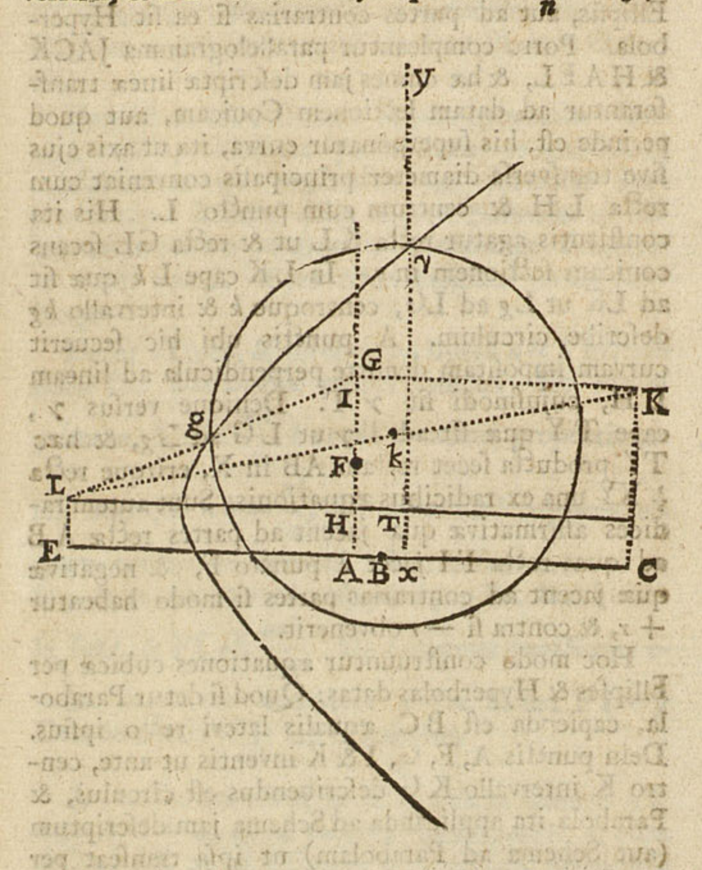
A puncto quovis B in recta quavis infinita BCE, cape duas quaſcunq; longitudines BC, BE ad eaſdem



partes ſi data Coni ſectio ſit Ellipſis, ad contrarias

ſi

si ea sit Hyperbola. Sit autem BC ad BE ut datæ sectionis latus rectum principale ad latus transversum, & BC nominata n, cape BA$=\frac{q}{n}$, idque



versus C si habeatur $-q$, aliter ad partes contrarias, Ad punctum A erige perpendiculu mAI, in que eo cape AF æqualem p & FG æqualem AF; item FI æqualem $\frac{r}{nn}$. Capiatur vero FI versus G

si termini p & r habent eadem signa, aliter versus A. Dein fac ut sit FH ad FI ut BC ad BE, & hanc FH cape à puncto F versus I si sectio sit Ellipsis, aut ad partes contrarias si ea sit Hyperbola. Porro compleantur parallelogramma JACK & HAEL, & hæ omnes jam descriptæ lineæ transferantur ad datam sectionem Conicam, aut quod perinde est, his superponatur curva, ita ut axis ejus sive transversa diameter principalis conveniat cum recta LH & centrum cum puncto L. His ita constitutis agatur recta KL ut & recta GL secans conicam sectionem in g. In LK cape Lk quæ sit ad LK ut Lg ad LG, centroque k & intervallo kg describe circulum. A punctis ubi hic secuerit curvam impositam demitte perpendicula ad lineam LH, cujusmodi sit γT. Denique versus γ, cape TY quæ sit ad Tγ ut LG ad Lg, & hæc TY producta secet rectam AB in X, eritque recta $\frac{1}{r}$ XY una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ jacent ad partes rectæ AB ad quas recta FI jacet à puncto F, & negativæ quæ jacent ad contrarias partes si modo habeatur $+r$, & contra si $-r$ obvenerit.

Hoc modo construuntur æquationes cubicæ per Ellipses & Hyperbolas datas: Quod si detur Parabola, capienda est BC æqualis lateri recto ipsius. Dein punctis A, F, G, I & K inventis ut ante, centro K intervallo KG describendus est circulus, & Parabola ita applicanda ad Schema jam descriptum (aut Schema ad Parabolam) ut ipsa transeat per puncta A & G, & axis ejus ipsi AC parallelus per punctum F, cadente vertice ad partes puncti illius F ad quas punctum B cadit à puncto C. His ita constitutis, si perpendicula ab ejus occursibus cum circulo demittantur ad lineam BC, eorum dimidia erunt radices æquationis construendæ.

Et notes quod ubi secundus æquationis terminus deest, & latus rectum Parabolæ ponitur numerus binarius, hæc constructio evadet eadem cum illa quam Cartesius attulit in Geometria sua, præterquam quod lineamenta hic sunt illorum duplicia.

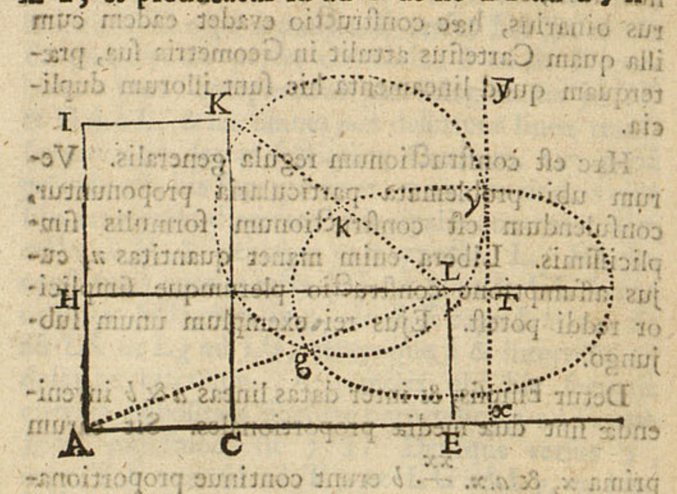
Hæc est constructionum regula generalis. Verum ubi problemata particularia proponuntur, consulendum est constructionum formulis simplicissimis. Libera enim manet quantitas n, cujus assumptione constructio plerumque simplicior reddi potest. Ejus rei exemplum unum subjungo.

Detur Ellipsis, & inter datas lineas a & b inveniendæ sint duæ mediæ proportionales. Sit earum prima x, & $a.x.\frac{xx}{a}.b$ erunt continue proportionales, adeoque $ab=\frac{x^3}{a}$, seu $x^3=aab$ æquatio est, quam construere oportet. Hic desunt termini p, & q, & terminus r est aab, adeoque BA & AF nullæ sunt, & FI est $\frac{aab}{nn}$. Ut terminus novissimus evadat simplicior assumatur $n=a$, & fiet $FI=b$ Deinde constructio ita se habebit.

A puncto quovis A in recta quavis infinita AE cape AC $=a$, & ad easdem partes puncti A cape AC ad AE ut est Ellipseos latus rectum principale ad latus transversum. Tum in perpendiculo AI cape AI $=b$, & AH ad AI ut est AC ad AE. Compleantur parallelogramma JACK, HAEL. Jungantur LA, LK. Huic schemati imponatur Ellipsis data. Secet ea rectam AL in puncto g, Fiat Lk ad LK ut Lg ad LA. Centro k intervallo kg describatur circulus secans Ellipsin in γ.

Ad

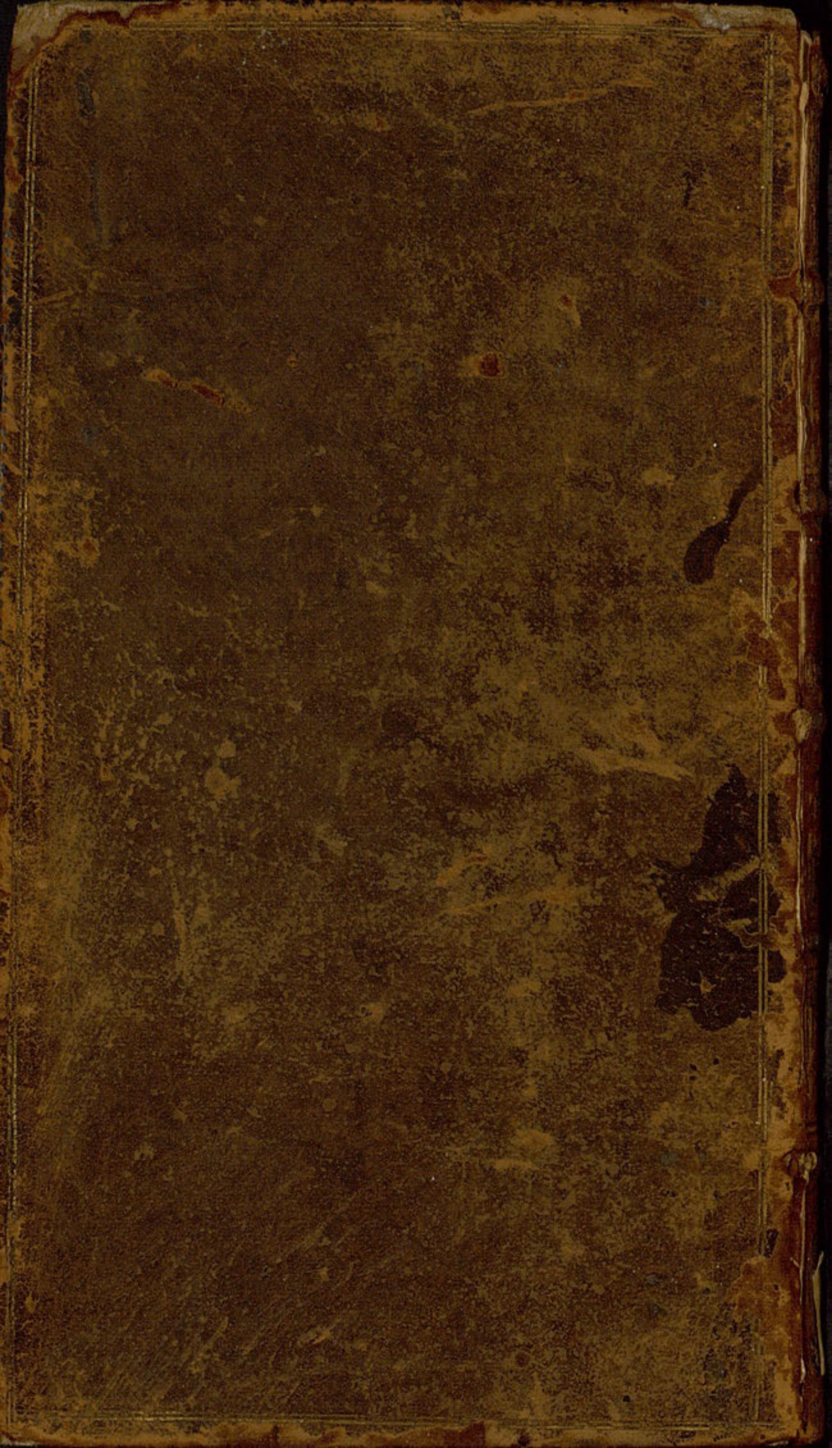
Ad AE demittatur perpendiculum γX secans HL in T, & producatur id ad Y ut sit TY ad Tγ sicut LA ad Lg. Sic fiet $\frac{1}{2}$ XY prima duarum mediæ proportionalium x. Q. E. I.



FINIS.

ERRATA.

Pag. 59. *lin.* 5. *lege* dupli Quoti. *Pag.* 150. *lin.* 16. E & F. p. 151. *lin.* 3. ex vigesimo octavo Problemate. p. 197. *lin. ult.* $\frac{Ex}{\frac{E}{f}\sqrt{xx-aa}}$




NEWTON'S
ARITH-
METICK
84